

## 理想流体力学試験問題(2)

1999-9-7, 12:50-14:20

by E. Yamazato

1.(20) 複素ポテンシャルが次式で表される流れの型を説明し、かつそれらの流れの速度ポテンシャルおよび流れの関数を求めよ。また、(1) の速度成分、 $u, v$  および合速度  $V$  を求めよ。

$$(1) w = aze^{i\alpha} \ (\alpha > 0), \quad (2) w = z^n \ (n = \frac{2}{3})$$

2.(20)  $z = \pm a$  にお互いに反対向きで強さの等しい  $\Gamma$  の渦がある場合について (1) 原点  $(0,0)$  に於ける速度を求めよ。(2) また二つの渦による誘起速度およびその向きを求めよ。3.(20) 図 1 に示すように無限に広い壁 ( $x=0$ ) に近接して点  $p(x,0)$  に強さ  $\Gamma$  の渦がある。その渦による誘起速度とその向きを求めよ。4.(20) 速度  $U$  の一様流れ中に強さ  $Q$  の吹き出しが原点にある場合、この流れ場に作用する力を求めよ。5.(25)  $4a$  の長さの平板に  $\alpha$  なる傾きをもち、かつ循環をもつ流れがある。(1) 流れの複素ポテンシャルを求めよ。(2) 平行流れ ( $w$ -平面) から平板に至る写像関係を示し、かつ流れをスケッチせよ。(3) 平板の後端に岐点がかかるようにしたときの循環値を求めよ。

(解)

1.

(1) Parallel flow with  $\theta = \alpha$

$$w = ar\{(\cos(\theta + \alpha) + i \sin(\theta + \alpha))\}$$

$$\varphi = ar \cos(\theta + \alpha), \quad \psi = ar \sin(\theta + \alpha)$$

(2) Corner flow with  $\theta = \frac{3}{2}\pi$

$$z = re^{i\theta}, \quad w = \varphi + i\psi = r^n e^{in\theta} = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

$$\varphi = r^n \cos n\theta, \quad \psi = r^n \sin n\theta$$

$$\text{For } n = \frac{2}{3}, \quad \varphi = r^{2/3} \cos \frac{2\theta}{3}, \quad \psi = r^{2/3} \sin \frac{2\theta}{3}$$

$$\frac{dw}{dz} = ae^{i\alpha} = a(\cos \alpha + i \sin \alpha) = u - iv$$

$$u = a \cos \alpha, \quad v = -a \sin \alpha, \quad V = a$$

2.

$$w = \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(z-a) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(z+a)$$

$$\frac{dw}{dz} = u - iv = \frac{i\Gamma}{2\pi} \frac{1}{z-a} - \frac{i\Gamma}{2\pi} \frac{1}{z+a} = \frac{i\Gamma}{2\pi} = \frac{i\Gamma}{2\pi} \frac{2a^2}{z^2 - a^2}$$

$$\text{At the origin}(0,0) u = 0, \quad v = -\frac{\Gamma}{\pi a}$$

$$V = \frac{\Gamma}{2\pi(2a)} = \frac{\Gamma}{4\pi a}$$

3.  $V = \frac{\Gamma}{4\pi x}$  で壁に平行に移動する。説明省略。

4.

$$w = Uz + m \ln z, \quad m = \frac{Q}{2\pi}$$

$$\frac{dw}{dz} = U + \frac{m}{z}$$

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 = U^2 + \frac{m^2}{z^2} + \frac{2Um}{z}$$

$$F_x - iF_y = \frac{i\rho}{2} \oint \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz = \frac{i\rho}{2} 2Um(2\pi i) = -2\pi\rho Um = -\rho UQ$$

$$F_x = -\rho UQ, \quad F_y = 0$$

5.

$$w = U\left(z_1 + \frac{a^2}{z_1}\right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z_1, \quad z_2 = z_1 e^{i\alpha}, \quad z = z_2 + \frac{a^2}{z_2}$$

$$\frac{dw}{dz_1} \frac{dz_1}{dz_2} \frac{dz_2}{dz} = 0$$

$$\frac{dw}{dz_1} = U\left(1 - \frac{a^2}{z_1^2}\right) - \frac{i\Gamma}{2\pi z_1} = 0$$

$$\text{At point } A, \quad z = 2a, \quad z_2 = a, \quad z_1 = z_2 e^{-i\alpha} = a e^{-i\alpha}$$

$$\left(\frac{dw}{dz_1}\right)_A = U\left(1 - \frac{a^2}{a^2 e^{-2i\alpha}}\right) - \frac{i\Gamma}{2\pi a e^{-i\alpha}} = 0$$

$$U(1 - e^{2i\alpha}) - \frac{i\Gamma}{2\pi a} e^{i\alpha} = 0$$

$$U(e^{-i\alpha} - e^{i\alpha}) - \frac{i\Gamma}{2\pi a} = 0$$

$$U(\cos \alpha - i \sin \alpha - \cos \alpha - i \sin \alpha) - \frac{i\Gamma}{2\pi a} = 0$$

$$\Gamma = -4\pi a U \sin \alpha \quad (\Gamma : \text{negative})$$