

理想流体力学試験問題(1)

1999-7-9, 18:00~19:30

by E. Yamazato

1. (25) 複素ポテンシャルが次式で表される流れの型を説明し、かつそれらの流れの速度ポテンシャルおよび流れの関数を求めよ。

$$(1) w = -5i \ln z + 3z, \quad (2) w = 3z + 2 \ln z$$

2. (25) 二次元の渦流れにおいて、速度成分が $u = x + y$, $v = x^2 - y$ なる流れは理論上存在しうるか。(2) その流れの流線を求めよ。(3) 直線 $x = \pm 1, y = \pm 1$ で区切られた正方形のまわりの循環値を求めよ。3. (25) 二次元ポテンシャル流れにおいて、その速度成分が、 $u = ax + by, v = cx + dy$ で与えられるとき、(1) 定数 a, b, c, d の関係、(2) 速度ポテンシャルおよび流れの関数を求めよ。4. (25) $4a$ の長さの平板に直角な流れがある。(1) 流れの複素ポテンシャルを求めよ。(2) 平行流れ (w -平面) から平板に至る写像関係を示し、かつ流れをスケッチせよ。

(解)

1.

(1) Parallel flow($U=3$)+Circulation flow($\Gamma = 10\pi$)

$$w = -5i \ln(re^{i\theta}) + 3re^{i\theta} = -5i \ln r + 5\theta + 3r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$\varphi = 5\theta + 3r \cos \theta, \quad \psi = 3r \sin \theta - 5 \ln r$$

(2) Parallel flow($U=3$)+source flow($Q = 4\pi$)

$$w = 3re^{i\theta} + 2 \ln(re^{i\theta})$$

$$\varphi = 3r \cos \theta + 2 \ln r, \quad \psi = 3r \sin \theta + 2\theta$$

2.

(1) $\text{div} V = 0$

$$(2) u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = x + y; \psi = xy + 1/2y^2 + f(x)$$

$$-v = \frac{\partial \psi}{\partial x} = -x^2 + y; \psi = -1/3x^3 + xy + f(y)$$

$$\psi = -1/3x^3 + 1/2y^2 + xy + c; 1/3x^3 - 1/2y^2 - xy = c$$

$$(3) \Gamma = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (2x - 1) dx dy = -4$$

3.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad a + d = 0$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = ax + by, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = cx + dy$$

$$\psi = axy + \frac{b}{2}y^2 + f(x), \quad \psi = -\frac{c}{2}x^2 - dxy + f(y) = axy - \frac{c}{2}x^2 + f(y)$$

$$\psi = axy + \frac{1}{2}(by^2 - cx^2) + \text{const.}$$

$$\text{For irrotational flow, } \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad b = c, \quad \psi = axy + \frac{b}{2}(y^2 - x^2) + \text{const.}$$

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = ax + by; \phi = 1/2ax^2 + bxy + f(y)$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = cx + dy; \phi = 1/2dy^2 + cxy + f(x)$$

$$\phi = 1/2a(x^2 - y^2) + bxy + c$$

4.

$$w = U(z_1 + \frac{a^2}{z_1}), z_2 = z_1^{-i1/2\pi}, z = z_2 + \frac{a^2}{z_2}, z_1 = iz_2$$

$$w = U(iz_2 + \frac{a^2}{z_2}) = iU(z_2 - \frac{a^2}{z_2})$$

$$w^2 = -U^2(z_2 - \frac{a^2}{z_2})^2, U^2z^2 = U^2(z_2 + \frac{a^2}{z_2})^2$$

$$w^2 + U^2z^2 = U^24a^2, w = U\sqrt{4a^2 - z^2} = iU\sqrt{z^2 - 4a^2}$$