

# 理想流体力学試験問題

1996-9-19, 12:50~14:20

by E. Yamazato

1. (35) 複素ポテンシャルが次式で表される流れの型を説明し、かつそれらの流れの速度ポテンシャルおよび流れの関数を求めよ.

$$(1) w = aze^{i\alpha} (\alpha > 0), (2) w = z^n (n = \frac{2}{3})$$

$$(3) w = -5i \ln z + 3z, (4) w = 3z + 2 \ln z$$

2. (25) (1) 二次元の渦流れにおいて、速度成分が  $u = 4y$ ,  $v = 2x$  なる流れは理論上存在しうるか. (2) その流れの流線を求めよ. (3) 直線  $y = 1$ ,  $y = 3$ ,  $x = 2$ ,  $x = 5$  で区切られた長方形のまわりの循環値を求めよ.

3. (25) 速度  $U$  の一様流れ中に強さ  $Q$  の吹き出しが原点にある場合、この流れ場に作用する力を求めよ.

4. (25)  $4a$  の長さの平板に  $\alpha$  なる傾きをもち、かつ循環をもつ流れがある. (1) 流れの複素ポテンシャルを求めよ. (2) 平行流れ ( $w$ -平面) から平板に至る写像関係を示し、かつ流れをスケッチせよ. (3) 平板の後端に岐点ができるようにしたときの循環値を求めよ.

5. (25) 二次元の渦流れで、その速度成分が  $v_r = 0$ ,  $v_\theta = \omega r$  なるときの渦度を求めよ.

6. (25) 速度成分が  $u = ax + by$ ,  $v = cx + dy$  で示される流れが非圧縮性流体となるための条件を示せ. また、流れが渦なし流れとした場合の流れ関数を求めよ.

# 理想流体力学試験問題

by E. Yamazato

9-19-1996, 12:50~14:20

1. (30) 複素ポテンシャルが次式で表される流れの型を説明し、かつそれらの流れの速度ポテンシャルおよび流れの関数を求めよ.

$$(1) w = aze^{i\alpha} \ (\alpha > 0), \quad (2) w = z^n \ (n = \frac{2}{3})$$

$$(3) w = -5i \ln z + 3z, \quad (4) w = 3z + 2 \ln z$$

(解)

(1) Parallel flow with  $\theta = \alpha$

$$w = ar\{\cos(\theta + \alpha) + i \sin(\theta + \alpha)\}$$

$$\varphi = ar \cos(\theta + \alpha), \quad \psi = ar \sin(\theta + \alpha)$$

$$\frac{dw}{dz} = ae^{i\alpha} = a(\cos \alpha + i \sin \alpha) = u - iv$$

$$u = a \cos \alpha, \quad v = -a \sin \alpha, \quad V = a$$

(2) Corner flow with  $\theta = \frac{3}{2}\pi$

$$z = re^{i\theta}, \quad w = \varphi + i\psi = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

$$\varphi = r^n \cos n\theta, \quad \psi = r^n \sin n\theta$$

$$\text{For } n = \frac{2}{3}, \quad \varphi = r^{2/3} \cos \frac{2\theta}{3}, \quad \psi = r^{2/3} \sin \frac{2\theta}{3}$$

(3) Parallel flow(U=3)+Circulation flow( $\Gamma = 10\pi$ )

$$w = -5i \ln(re^{i\theta}) + 5re^{i\theta} = -5i \ln r + 5\theta + 3r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$\varphi = 5\theta + 3r \cos \theta, \quad \psi = 3r \sin \theta - 5 \ln r$$

(4) Parallel flow(U=3)+source flow( $Q = 4\pi$ )

$$w = 3re^{i\theta} + 2 \ln(re^{i\theta})$$

$$\varphi = 3r \cos \theta + 2 \ln r, \quad \psi = 3r \sin \theta + 2\theta$$

2. (25) (1) 二次元の渦流れにおいて、速度成分が $u = 4y, v = 2x$ なる流れは理論上存在しうるか. (2) その流れの流線を求めよ. (3) 直線  $y = 1, y = 3, x = 2, x = 5$  で区切られた長方形のまわりの循環値を求めよ.

(解)

$$(1) \operatorname{div} V = 0$$

$$(2) \frac{dx}{4y} = \frac{dy}{2x}, \quad 2x dx - 4y dy = 0, \quad x^2 - 2y^2 = c$$

$$(3) 4(2 - 5) + 10(1 - 3) - 12(1 - 5) - 4(3 - 1) = -12m^2/s$$

$$\Gamma = \int_2^5 \int_1^3 \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy$$

$$= - \int_1^3 6 dy = -(18 - 6) = -12m^2/s$$

3. (25) 速度  $U$  の一様流れ中に強さ  $Q$  の吹き出しが原点にある場合、この流れ場に作用する力を求めよ。

(解)

$$w = Uz + m \ln z, \quad m = \frac{Q}{2\pi}$$

$$\frac{dw}{dz} = U + \frac{m}{z}$$

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 = U^2 + \frac{m^2}{z^2} + \frac{2Um}{z}$$

$$F_x - iF_y = \frac{i\rho}{2} \oint \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz = \frac{i\rho}{2} 2Um(2\pi i) = -2\pi\rho Um = -\rho UQ$$

$$F_x = -\rho UQ, \quad F_y = 0$$

4. (25)  $4a$  の長さの平板に  $\alpha$  なる傾きをもち、かつ循環をもつ流れがある。(1) 流れの複素ポテンシャルを求めよ。(2) 平行流れ ( $w$ -平面) から平板に至る写像関係を示し、かつ流れをスケッチせよ。(3) 平板の後端に岐点ができるようにしたときの循環値を求めよ。

(解)

$$w = U\left(z_1 + \frac{a^2}{z_1}\right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z_1, \quad z_2 = z_1 e^{i\alpha}, \quad z = z_2 + \frac{a^2}{z_2}$$

$$\frac{dw}{dz_1} \frac{dz_1}{dz_2} \frac{dz_2}{dz} = 0$$

$$\left(\frac{dw}{dz_1}\right)_A = U\left(1 - \frac{a^2}{z_1^2}\right) - \frac{i\Gamma}{2\pi z_1} = 0$$

$$\text{At point } A, \quad z = 2a, \quad z_2 = a, \quad z_1 = z_2 e^{-i\alpha} = a e^{-i\alpha}$$

$$\left(\frac{dw}{dz_1}\right)_A = U\left(1 - \frac{a^2}{a^2 e^{-2i\alpha}}\right) - \frac{i\Gamma}{2\pi a e^{-i\alpha}} = 0$$

$$U(1 - e^{2i\alpha}) - \frac{i\Gamma}{2\pi a} e^{i\alpha} = 0$$

$$U(e^{-i\alpha} - e^{i\alpha}) - \frac{i\Gamma}{2\pi a} = 0$$

$$U(\cos \alpha - i \sin \alpha - \cos \alpha - i \sin \alpha) - \frac{i\Gamma}{2\pi a} = 0$$

$$\Gamma = -4\pi a U \sin \alpha \quad (\Gamma : \text{negative})$$

5. (25) 二次元の渦流れで、その速度成分が  $v_r = 0$ ,  $v_\theta = \omega r$  なるときの渦度を求めよ.

(解)

$$\begin{aligned}v_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0, & \psi &= f(r) \\v_\theta &= -\frac{\partial \psi}{\partial r} = \omega r, & \psi &= -\frac{1}{2} \omega r^2 + f(\theta) \\ \psi &= -\frac{1}{2} \omega r^2 = -\frac{1}{2} \omega (x^2 + y^2) \\ \zeta &= -\nabla^2 \psi = -(\omega - \omega) = 2\omega\end{aligned}$$

6. (25) 速度成分が  $u = ax + by$ ,  $v = cx + dy$  で示される流れが非圧縮性流体となるための条件を示せ. また、流れが渦なし流れとした場合の流れ関数を求めよ.

(解)

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, & a + d &= 0 \\ u &= \frac{\partial \psi}{\partial y} = ax + by, & v &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} = cx + dy \\ \psi &= axy + \frac{b}{2}y^2 + f(x), & \psi &= -\frac{c}{2}x^2 - dxy + f(y) = axy - \frac{c}{2}x^2 + f(y) \\ \psi &= axy + \frac{1}{2}(by^2 - cx^2) + const. \\ \text{For irrotational flow, } \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial v}{\partial x}, & b &= c, \psi = axy + \frac{b}{2}(y^2 - x^2) + const.\end{aligned}$$