理想流体力学演習問題 (6)

2003-1-16

by E. Yamazato

番号・氏名 ______________________________

1. 複素ポテンシャルが次の式で表される流れについて説明せよ。（１０点）

$$(1) w = aze^{-i\alpha} (\alpha > 0), (2) w = z^n (n = 1/2)$$

2. 渦なし二次元流れで、流れの関数が $\psi = 2xy$ で与えられるとき、速度ポテンシャルもよび複素ポテンシャルを求めよ（１０点）

理想流体力学演習問題 (6)

1-16-2003

by E. Yamazato

番号・氏名 ______________________

1. 複素ポテンシャルが次の式で表される流れについて説明せよ。（１０点）

$$(1) w = aze^{-i\alpha} (\alpha > 0), (2) w = z^n (n = 1/2)$$

2. 渦なし二次元流れで、流れの関数が $\psi = 2xy$ で与えられるとき、速度ポテンシャルもよび複素ポテンシャルを求めよ（１０点）

（解）

$$\begin{aligned}
1.(1) \quad & \frac{dw}{dz} = ae^{-\alpha} = a(cos\alpha - isin\alpha) = u - iv \\
& \therefore\ u = acos\alpha, v = asin\alpha, V = a \\
1.(2) \quad & z = re^{i\theta}, w = \varphi + i\psi = r^n ein\theta = r^n(cosn\theta + isinn\theta) \\
& \varphi = r^n cosn\theta, \psi = r^{1/2}cos\frac{\theta}{2}, \psi = r^{1/2}sin\frac{\theta}{2} \\
2. \quad & u = \frac{\partial\psi}{\partial y} = 2x = \frac{\partial\phi}{\partial x}; v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = -2y = \frac{\partial\phi}{\partial x} = \\
& \varphi = x^2 - y^2 + c; \therefore\ w = \varphi + i\psi = (x^2 - y^2) + i2xy = az^2
\end{aligned}$$

理想流体力学演習問題 (7)

1-23-2003

by E. Yamazato

番号・氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1. ポテンシャル $w = -ilnz + 2z$ で与えられる流れについて（１）これはどういう型の流れを組み合わせたものか。（２）速度ポテンシャルと流れの関数を求めよ。（３）$r - 1, \theta = 3\imath/2$ における速度を求めよ。（１５点）2. 複素ポテンシャルが次式で表される流れの型を説明し、かつそんれらの流れの速度ポテンシャルおよび流れの関数お求めよ。（１０点）

理想流体力学演習問題 (7)

1-23-2003

by E. Yamazato

番号・氏名

1. ポテンシャル $w = -ilnz + 2z$ で与えられる流れについて（１）これはどういう型の流れを組み合わせたものか。（２）速度ポテンシャルと流れの関数を求めよ。（３）$r - 1, \theta = 3\imath/2$ における速度を求めよ。（１５点）2. 複素ポテンシャルが次式で表される流れの型を説明し、かつそんれらの流れの速度ポテンシャルおよび流れの関数お求めよ。（１０点）

（解）

1. (1)Circulation($\Gamma = 2\pi$)+Parallel flow(U=2)

   (2)$w = -iln(re^{i\theta} + 2re^{i\theta} = -ilnr + \theta + 2r(cos\theta + isin\theta)$

   $= (\theta + 2rcon\theta) + i(2rsin\theta - lnr)$

   $\varphi = \theta + 2rcos\theta, \psi = 2rsin\theta - lnr$

   $\dfrac{dw}{dz} = -\dfrac{i}{z} + 2 = 2 - i\dfrac{1}{r}(cos\theta - isin\theta)$

   $Atr = 1 : \theta = \dfrac{3\pi}{2}; \dfrac{dw}{dz} = 2 - i[0 - i(-1)] = 3, V = 3$

2. Parallel flow(U=2)+Source flow($Q = 6\pi$)

   $w = 2re^{i\theta} + 3ln(re^{i\theta})$

   $\therefore \varphi = 2rcos\theta + 3lnr, \psi = 2rsin\theta + 3\theta$

理想流体力学演習問題 (8)

8-1-2002

by E. Yamazato

番号・氏名 ______________________________

1. 図に示すような 4a の長さの平板に α なる傾きをもち、かつ循環を持つ流れがある。(1) 流れの複素ポテンシャルを求めよ。(2) 平行流れ (w-平面) から平板に至る写像関係を示し、かつ流れをスケッチせよ。(3）平板の後端に岐点がくるようにしたときの循環値を求めよ。（２０点）

（解）

1. $w = U(z_1 + \dfrac{a^2}{z_1}) - \dfrac{i\Gamma}{2\pi} ln z_1, z_2 = z_1 e^{i\alpha}, z = z_2 + \dfrac{a^2}{z_2}$

$\dfrac{dw}{dz}\dfrac{dz_1}{dz_2}\dfrac{dz_2}{dz} = 0$

$\dfrac{dw}{d_1})_A = U(1 - \dfrac{a^2}{z_1}) - \dfrac{i\Gamma}{2\pi z_1} = 0$

At point A, $z = 2a, z_2 = a, z_1 = z_2 e^{-i\alpha} = ae^{-i\alpha}$

$\dfrac{dw}{dz_1})_A = U(1 - \dfrac{a^2}{a^2 e^{-2i\alpha}}) - \dfrac{i\Gamma}{2\pi a e^{-i\alpha}} = 0$

$U(1 - e^{2i\alpha}) - \dfrac{i\Gamma}{2\pi a} e^{i\alpha}, U(e^{-i\alpha} - e^{i\alpha}) - \dfrac{i\Gamma}{2\pi a} = 0$

$U(cos\alpha - isin\alpha - cos\alpha - isin\alpha) - \dfrac{i\Gamma}{2\pi a} = 0$

$\Gamma = -4\pi a U sin\alpha (\Gamma : negative)$

理想流体力学演習問題 (8)

8-1-2002

by E. Yamazato

番号・氏名

1. 速度 U の一様流れの中に、循環 $-\Gamma$ の渦と $z=a$ に強さ Q の吹き出しがある場合 z=0 の渦に作用する力を求めよ。（１０点）
2. 二次元ポテンシャル流れにおいて、z=0 に Γ_1 z=a に Γ_2 の循環がある場合、z=0 および z=a の渦に作用する力を求めよ。（１０点）

（解）

1.
$$w = Uz - \frac{i\Gamma}{2\pi}lnz + \frac{Q}{2\pi}ln(z-a)$$
$$\frac{dw}{dz} = U - \frac{i\Gamma}{2\pi z} + \frac{Q}{2\pi(z-a)}$$
$$(\frac{dw}{dz})^2 = U^2 - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 x^2} + \frac{Q^2}{4\pi^2 z^2} + \frac{Q^2}{4\pi^2(z-a)^2)} + \frac{iU\Gamma}{\pi z}$$
$$+\frac{UQ}{\pi(z-a)} - \frac{i\Gamma Q}{2\pi^2 z(z-a)} - \frac{i\Gamma Q}{2\pi^2 az} - \frac{i\Gamma Q}{2\pi^2 a(z-a)}$$
$$\frac{1}{z(z-a)} = \frac{1}{a(z-a)} - \frac{1}{az}$$
$$\text{At z=0} : F_x - iF_y = \frac{i\rho}{2}\oint(\frac{dw}{dz})^2 dz = \frac{i\rho}{2}(\frac{iU\Gamma}{\pi} - \frac{i\Gamma Q}{2\pi^2 a}) = -i\rho\Gamma(U - \frac{Q}{2\pi a})$$
$$F_x = 0, F_y = \rho\Gamma(U - \frac{Q}{2\pi a})$$

2.
$$w = -\frac{i\Gamma_1}{2\pi}lnx - \frac{i\Gamma_2}{2\pi}ln(z-a)$$
$$\frac{dw}{dz} = -\frac{i\Gamma_1}{2\pi z} - \frac{i\Gamma_2}{2\pi(z-a)}$$
$$(\frac{dw}{dz})^2 = \frac{\Gamma_1^2}{4\pi^2 z^2} + \frac{\Gamma_2^2}{4\pi^2(z-a)^2} - \frac{\Gamma_1\Gamma_2}{2\pi^2 a(z-a)} + \frac{\Gamma_1\Gamma_2}{2\pi^2 a(z-a)} + \frac{\Gamma_1\Gamma_2}{2\pi^2 az}$$
$$\frac{1}{z(z-a)} = \frac{1}{a(z-a)} - \frac{1}{az}$$
$$\text{At z=0} : F_x - iF_y = \frac{i\rho}{2}\oint(\frac{dw}{dz}^2)dz = i\rho 22\pi i\frac{\Gamma_1\Gamma_2}{2\pi^2 a} = -\frac{\rho\Gamma_1\Gamma_2}{2\pi a}$$
$$\therefore F_x = -\frac{\rho\Gamma_1\Gamma_2}{2\pi a}, F_y = 0$$
$$\text{At z=a} : F_x - iF_y = \frac{i\rho}{2}\oint(\frac{dw}{dz})^2 dz = \frac{i\rho}{2}2\pi i\frac{-\Gamma_1\Gamma_2}{2\pi^2 a} = \frac{\rho\Gamma_1\Gamma_2}{2\pi^2 a}) = i\rho\frac{\Gamma_1\Gamma_2}{2\pi a}$$
$$\therefore F_x = \frac{\rho\Gamma_1\Gamma_2}{2\pi a}, F_y = 0$$

————————————————-Remove afterward————

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} =$$

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} =$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} =$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

$$v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} =$$

$$v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} =$$

————————————————————-