理想流体力学試験問題

2001-8-2, 12:50〜14:20

by E. Yamazato

1. (20) 複素ポテンシャルが次式で表される流れの型を説明し、かつそれらの流れの速度ポテンシャルおよび流れの関数を求めよ．

$$(1)\ w = -15i \ln z + 13z,\ \ (2)\ w = 23z + 22 \ln z$$

2. (20) 二次元の渦流れにおいて，速度成分が $u = x + y,\ v = x^2 - y$ なる流れは理論上存在しうるか．(2) その流れの流線を求めよ．(3) 直線 $x = \pm 5, y = \pm 6$ で区切られた正方形のまわりの循環値を求めよ．

3. (20) 二次元ポテンシャル流れにおいて、その速度成分が、$u = c_1 x + c_2 y, v = c_3 x + c_4 y$ で与えられるとき、(1) 定数 c_1, c_2, c_3, c_4 の関係、(2) 流れの関数を求めよ。

4. (20) $4a$ の長さの平板に α なる傾きをもち，かつ循環をもつ流れがある．平行流れ (w-平面) から平板に至る写像関数を求め，かつ流れを簡単にスケッチせよ．

5. (20) 速度 U の一様流れ中に強さ Q の吹き出しが原点にある場合、この流れ場に作用する力を求めよ．

理想流体力学試験問題

by E. Yamazato

7-13-2000, 12:50〜14:20

1. (20) 複素ポテンシャルが次式で表される流れの型を説明し、かつそれらの流れの速度ポテンシャルおよび流れの関数を求めよ.

$$(1)\ w = -15i\ln z + 13z,\ (2)\ w = 23z + 22\ln z,\ (3)\ w = z^n\ (n = \frac{2}{3})$$

（解）

(1) Parallel flow(U=13)+Circulation flow($\Gamma = 30\pi$)

$w = -15i\ln(re^{i\theta}) + 13re^{i\theta} = -15i\ln r + 15\theta + 13r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$\varphi = 15\theta + 13r\cos\theta, \quad \psi = 13r\sin\theta - 15\ln r$

(2) Parallel flow(U=23)+source flow($Q = 44\pi$)

$w = 23re^{i\theta} + 22\ln(re^{i\theta})$

$\varphi = 23r\cos\theta + 22\ln r, \quad \psi = 23r\sin\theta + 22\theta$

(3) Corner flow with $\theta = \frac{3}{2}\pi$

$z = re^{i\theta}, \quad w = \varphi + i\psi = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$

$\varphi = r^n\cos n\theta, \quad \psi = r^n\sin n\theta$

$For\ n = \dfrac{2}{3}, \quad \varphi = r^{2/3}\cos\dfrac{2\theta}{3}, \quad \psi = r^{2/3}\sin\dfrac{2\theta}{3}$

$\dfrac{dw}{dz} = ae^{i\alpha} = a(\cos\alpha + i\sin\alpha) = u - iv$

$u = a\cos\alpha, \quad v = -a\sin\alpha, \quad V = a$

2. (20) 二次元の渦流れにおいて，速度成分が $u = x + y,\ v = x^2 - y$ なる流れは理論上存在しうるか．(2) その流れの流線を求めよ．(3) 直線 $x = \pm 5, y = \pm 6$ で区切られた正方形のまわりの循環値を求めよ．

（解）

(1) $divV = 0$

$(2) u = \dfrac{\partial\psi}{\partial y} = x + y; \psi = xy + 1/2y^2 + f(x)$

$-v = \dfrac{\partial\psi}{\partial x} = -x^2 + y; \psi = -1/3x^3 + xy + f(y)$

$\psi = -1/3x^3 + 1/2y^2 + xy + c_3; 1/3x^3 - 1/2y^2 - xy = c$

$$(3)\Gamma = \int_{-5}^{5}\int_{-6}^{6}(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y})dxdy = \int_{-5}^{5}\int_{-6}^{6}(2x-1)dxdy = -120$$

3. (20) 二次元ポテンシャル流れにおいて、その速度成分が、$u = c_1x + c_2y, v = c_3x + c_4y$ で与えられるとき、(1) 定数 c_1, c_2, c_3, c_4 の関係、(2) 流れの関数を求めよ。

（解）

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad c_1 + c_4 = 0$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = c_1x + c_2y, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = c_3x + c_4y$$

$$\psi = c_1xy + \frac{c_2}{2}y^2 + f(x), \quad \psi = -\frac{c_3}{2}x^2 - c_4xy + f(y) = c_1xy - \frac{c_3}{2}x^2 + f(y)$$

$$\psi = c_1xy + \frac{1}{2}(c_2y^2 - c_3x^2) + const.$$

For irrotational flow, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial x},\ c_2 = c_3,\ \psi = c_1xy + \dfrac{c_2}{2}(y^2 - x^2) + const.$

4.(20) 速度 U の一様流れ中に強さ Q の吹き出しが原点にある場合、この流れ場に作用する力を求めよ．

（解）

$$w = Uz + m\ln z, \quad m = \frac{Q}{2\pi}$$

$$\frac{dw}{dz} = U + \frac{m}{z}$$

$$(\frac{dw}{dz})^2 = U^2 + \frac{m^2}{z^2} + \frac{2Um}{z}$$

$$F_x - iF_y = \frac{i\rho}{2}\oint(\frac{dw}{dz})^2dz = \frac{i\rho}{2}2Um(2\pi i) = -2\pi\rho Um = -\rho UQ$$

$$F_x = -\rho UQ, \quad F_y = 0$$

5.(25) $4a$ の長さの平板に α なる傾きをもち，かつ循環をもつ流れがある．(1) 流れの複素ポテンシャルを求めよ．(2) 平行流れ (w-平面) から平板に至る写像関係を示し，かつ流れをスケッチせよ．(3) 平板の後端に岐点がくるようにしたときの循環値をを求めよ．

（解）

$$w = U(z_1 + \frac{a^2}{z_1}) - \frac{i\Gamma}{2\pi}\ln z_1, \quad z_2 = z_1e^{i\alpha}, \quad z = z_2 + \frac{a^2}{z_2}$$

$$\frac{dw}{dz_1}\frac{dz_1}{dz_2}\frac{dz_2}{dz} = 0$$

$$\frac{dw}{dz_1} = U(1 - \frac{a^2}{z_1^2}) - \frac{i\Gamma}{2\pi z_1} = 0$$

$$At\ point\ A,\ z = 2a,\ z_2 = a, \quad z_1 = z_2e^{-i\alpha} = ae^{-i\alpha}$$

$$\frac{dw}{dz_1})_A = U(1 - \frac{a^2}{a^2e^{-2i\alpha}}) - \frac{i\Gamma}{2\pi ae^{-i\alpha}} = 0$$

$$U(1 - e^{2i\alpha}) - \frac{i\Gamma}{2\pi a}e^{i\alpha} = 0$$

$$U(e^{-i\alpha} - e^{i\alpha}) - \frac{i\Gamma}{2\pi a} = 0$$

$$U(\cos\alpha - i\sin\alpha - \cos\alpha - i\sin\alpha) - \frac{i\Gamma}{2\pi a} = 0$$

$$\Gamma = -4\pi aU\sin\alpha\ (\Gamma:\ negative)$$