理想流体力学試験問題

2001-8-2,12:50∼14:20

by E. Yamazato

1.(20) 複素ポテンシャルが次式で表される流れの型を説明し、かつそれらの流れの速度ポテンシャルおよび流れの関数を求めよ。

$$(1)w = -15ilnz + 13z, \quad (2)w = 23z + 22lnz$$

2.(20) 二次元の渦流れにおいて，速度成分が $u = x + y,\ v = x^2 - y$ なる流れは理論上存在しうるか．(2) その流れの流線を求めよ．(3) 直線 $x = \pm 1, y = \pm 1$ で区切られた正方形のまわりの循環値を求めよ．

3. 速度成分が $u = ax + by, v = cx + dy$ で示される流れが非圧縮性流体となるための条件を示せ．また，流れが渦なし流れとした場合の流れ関数を求めよ．

4.(20) 速度 U の一様流れ中に強さ Q の吹き出しが原点にある場合、この流れ場に作用する力を求めよ。

5.(25)4a の長さの平板に α なる傾きをもち、かつ循環をもつ流れがある。(1) 平行流れ（w −平面）から平板に至る写像関係を示し、かつ流れをスケッチせよ。(2) 平板の後端に岐点がくるようにしたときの循環値を求めよ。

1.

(1) Parallel flow (U=3)+Circulation flow($\Gamma = 30\pi$)

$$w = -15iln(re^{i\theta}) + 13re^{i\theta} = -15ilnr + 15\theta + 13r(cos\theta + isin\theta)$$

$$\varphi = 15\theta + 13rcos\theta, \psi = 13rsin\theta - 15lnr$$

(2) Parallel flow(U=23)Source flow($Q = 44\pi$)

$$w = 23re^{i\theta} + 22lnre^{i\theta}$$

$$\varphi = 23rcos\theta + 22lnr, \psi = 23rsin\theta + 22\theta$$

2.

$$(1)divV = 0$$

$$(2)u = \frac{\partial\psi}{\partial y} = x + y, \quad \psi = xy + \frac{1}{2}y^2 + f(x)$$

$$-v = \frac{\partial\psi}{\partial x} = -x^2 + y \quad \psi = -\frac{1}{3}x^3 + xy + f(y)$$

$$\psi = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}y^2 + xy + c_3, \quad \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}y^2 - xy = c$$

$$(3)\Gamma = \int_{-5}^{5}\int_{-6}^{6}(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y})dxdy$$

$$= \int_{-5}^{5}\int_{-6}^{6}(2x - 1)dxdy = -120$$

3.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad a + d = 0$$

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y} = ax + by, \quad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = cx + dy$$

$$\psi = axy + \frac{b}{2}y^2 + f(x), \quad \psi = -\frac{c}{2}x^2 - dxy + f(y) = axy - \frac{c}{2}x^2 + f(y)$$

$$\psi = axy + \frac{1}{2}(by^2 - cx^2) + const.$$

For irrotational flow, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial x}$, $b = c$, $\psi = axy + \dfrac{b}{2}(y^2 - x^2) + const.$

4.

$$\begin{aligned}
&w = Uz + mlnz, m = \frac{Q}{2\pi} \\
&\frac{dw}{dz} = U + \frac{m}{z} \\
&(\frac{dw}{dz})^2 = U^2 + \frac{m^2}{z^2} + \frac{2Um}{z} \\
&F_x - F_y = \frac{i\rho}{2}\oint(\frac{dw}{dz})^2 dz = \frac{i\rho}{2}2Um(2\pi i) = -\rho UQ \\
&F_x = -\rho UQ, F_y = 0
\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
&w = U(z_1 + \frac{a^2}{z_1}) - \frac{i\Gamma}{2\pi}lnz_1, z_2 = z_1 e^{i\alpha}, z = z_2 + \frac{a^2}{z_2} \\
&\frac{dw}{dz_1}\frac{dz_1}{dz_2}\frac{dz_2}{dz} = 0 \\
&\frac{dw}{dz_1} = U(1 - \frac{a^2}{z_1^2} - \frac{i\Gamma}{2\pi z_1} = 0 \\
&\text{At point A}, z = 2a, z_2 = a, z_1 = z_2 e^i\alpha \\
&\frac{dw}{dz_1})_A = U(1 - \frac{a^2}{a^2 e^{-2i\alpha}}) - \frac{i\Gamma}{2\pi a e^{-i\alpha}} = 0 \\
&U(1 - e^{2i\alpha}) - \frac{i\Gamma}{2\pi a}e^{i\alpha} = 0 \\
&U(e^{-i\alpha}) - e^{i\alpha} - \frac{i\Gamma}{2\pi a} = 0 \\
&U(cos\alpha - isin\alpha - cos\alpha - isin\alpha) - \frac{i\Gamma}{2\pi a} = 0 \\
&\Gamma = -4\pi aUsin\alpha(\Gamma : negative)
\end{aligned}$$