理想流体力学演習問題 (0)

0-1. もし $\phi(x,y,z) = 3x^2y - y^3z^2$ で表されるとき，点 (1,-2,-1) における $\nabla\phi$ を求めよ．

（解）

$$\nabla\phi = (\frac{\partial}{\partial x}i + \frac{\partial}{\partial y}j + \frac{\partial}{\partial z}k)(3x^2y - y^3z^2)$$

$$= 6xyi + (3x^2 - 3y^2z^2)j - 2y^3zk$$

$$At\ point(1,-2,-1),\ \nabla\phi = -12i - 9j - 16k$$

0-2. $\phi = \ln|\overline{r}|$ で表されるとき $\nabla\phi$ を求めよ．ここで $\overline{r} = xi + yj + zk$ である．

（解）

$$|\overline{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},\ \phi = \ln|\overline{r}| = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y2 + z^2)$$

$$\nabla\phi = \frac{1}{2}\{i\frac{2x}{x^2+y^2+z^2} + j\frac{2y}{x^2+y^2+z^2} + k\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}\}$$

$$= \frac{xi + yj + zk}{x^2+y^2+z^2} = \frac{\overline{r}}{r^2}$$

0-3. $\phi = 2x^3y^2z^4$ で表されるとき, (1) $\nabla\nabla\phi$ ($div\ grad\phi$) の値を求めよ. (2)$\nabla\nabla\phi = \nabla^2\phi$ なることを示せ.

$$where\ \nabla^2\phi = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

（解）

$$(1)\ \nabla\phi = 6x^2y^2z^4i + 4x^3yz^4j + 8x^3y^2z^3k$$

$$\nabla\nabla\phi = 12xy^2z^4 + 24x^3y^2z^2$$

$$(2)\ \nabla\nabla\phi = (\frac{\partial}{\partial x}i + \frac{\partial}{\partial y}j + \frac{\partial}{\partial z}k)(\frac{\partial\phi}{\partial x}i + \frac{\partial\phi}{\partial y}j + \frac{\partial\phi}{\partial z}k)$$

$$= \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = \nabla^2\phi$$

0-4. $\overline{A} = x^2yi - 2xzj + 2yzk$ なるとき $curl\ curl\overline{A}$ を求めよ．

（解）

$$curl\overline{A} = \nabla\times\overline{A} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2y & -2xz & 2yz \end{vmatrix} = (2x+2z)i - (x^2+2z)k$$

$$curlcurl\overline{A} = \nabla\times(\nabla\times\overline{A}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x+2z & 0 & -(x^2+2z) \end{vmatrix} = 2(x+1)j$$

0-5. $\phi = 1/|\overline{r}|$ として $\nabla\phi$ を求めよ．ここで $\overline{r} = xi + yj + zk$ である．

（解）

$$|\overline{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$grad\phi = \nabla\phi = -i\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - j\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - k\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$= -\frac{xi + yj + zk}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = -\frac{\overline{r}}{r^3}$$

0-6. $\nabla^2(1/|\overline{r}|) = 0$ なることを証明せよ．ここで $\overline{r} = xi + yj + zk$ である．

（解）

$$\nabla^2(1/|\overline{r}|) = -(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} + 3x^2(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}$$

$$-(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} + 3y^2(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}$$

$$-(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} + 3z^2(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}$$

$$= -3(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} + 3(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2)^{-5/2} = 0$$

0-7. もし $\overline{A} = xzi - yzj + xyzk$ で表されるとき点 (1,-1,1) における $\nabla\overline{A}(div\overline{A})$ を求めよ．

（解）

$$\nabla\overline{A} = (\frac{\partial}{\partial x}i + \frac{\partial}{\partial y}j + \frac{\partial}{\partial z}k)(xzi - yzj + xyzk)$$

$$= z - z + xy = xy, \quad \nabla\overline{A}(1,-1,1) = -1$$

0-8. 次の式を証明せよ．

$$(1)\ \nabla\times(\nabla\phi) = 0(curl\ grad\phi = 0),\ (2)\ \nabla(\nabla\times\overline{A}) = 0\ (div\ curl\overline{A} = 0)$$

（解）

$$(1) \qquad \nabla\times\nabla\phi = i(\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial z}) - j(\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial z} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial z}) + k(\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}) = 0$$

$$(2) \qquad \nabla(\nabla\times\overline{A}) = (\frac{\partial^2 A_z}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x\partial z}) - (\frac{\partial^2 A_z}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial y\partial z}) + (\frac{\partial^2 A_y}{\partial x\partial z} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial y\partial z}) = 0$$