

理想流体力学演習問題 (1)

8-1-2002

by E. Yamazato

番号・氏名 _____

1. 二次元流れの速度成分が $u=x-4y, v=-4x-y$ で与えられる流れは理論上存在するか。流れの関数を求めよ。もしその流れが渦なし流れであれば速度ポテンシャルを求めよ。(10点)

2. 二次元定常流れにおける速度成分が次のように与えられるとき、点 (3,1) を通る流線の式を求めよ。(10点)

$$u = 4x^2y, v = -4y^2x$$

(解)

$$1. \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 1 - 1 = 0$$

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -4$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = x - 4y; \psi = sy - 2y^2 + f(x)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -4x - y; \psi = xy - 2y^2 + f(y)$$

$$\therefore \psi = 2(x^2 - y^2) + xy + c$$

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = x - 4y; \phi = 1/2x^2 - 4xy + f(y)$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -4x - y; \phi = -4xy - 1/2y^2 + f(x)$$

$$\therefore \phi = 1/2(x^2 - y^2) - 4xy + c$$

$$2. \quad \frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} = -\frac{4y^2x}{4x^2y} = -\frac{y}{x}$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0; xy = c$$

$$\text{At point}(3, 1), c = 3; \therefore xy = 3$$

理想流体力学演習問題 (2)

8-1-2002

by E. Yamazato

番号・氏名

1. 速度成分が $u = ax + by, v = cx + dy$ で示される流れが非圧縮性流体となるための条件を示せ。また、流れが渦なし流れとした場合の流れ関数を求めよ。(10点) 2. 非圧縮性流体の速度成分が $u = ax, v = ay, w = -az$ で与えられるとすればこの流れの流線は $y^2z = \text{const}, x/y = \text{const}$ の曲面の交わりの曲線で表されることを証明せよ。(10点)
- (解)

$$1. \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, a + d = 0$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = ax + by, v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = cx + dy$$

$$\psi = axy + \frac{b}{2}y^2 + f(x), \psi = -\frac{c}{2}x^2 - dxy + f(y) = axy - \frac{c}{2}x^2 + f(y)$$

$$\therefore \psi = axy + \frac{1}{2}(by^2 - cx^2) + \text{const.}$$

$$\text{For irrotational flow, } \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, b = c$$

$$\therefore \psi = axy + \frac{b}{2}(y^2 - x^2) + \text{const.}$$

$$2. \quad \frac{dx}{ax} = \frac{dy}{ay}, \ln x - \ln y = c; \therefore \frac{x}{y} = c$$

$$\frac{dy}{ay} = -\frac{dz}{2az}, \ln y + 1/2 \ln z = c; yz^{1/2} = c; \therefore y^2z = c$$

理想流体力学演習問題 (3)

8-1-2002

by E. Yamazato

番号・氏名

1. 吹き出し流量が Q で吹き出し点が原点にあり、さらに x 軸に平行な速度 U の流れがこれに加わった場合、この組み合わせられた流れの岐点を通る流線は $\psi = Q/2$ であることを証明せよ。(10点) 2.(1) 二次元の渦流れにおいて、速度成分が $u=4y, v=2x$ なる流れは理論上存在するか。(2) その流れの流線を求めよ (3) 直線 $y=1, y=3, x=2, x=5$ で区切られた長方形のまわりの循環値を求めよ。(10点)

(解)

1. $\psi = Ur \sin\theta + m\theta$

$$U - \frac{Q}{2\pi r_s} = 0$$

$$\therefore \psi = U \frac{m}{U} \sin\pi + m\pi = \frac{Q}{2}$$

2. (1) $\text{div}V = 0$

$$(2) \frac{dx}{4y} = \frac{dy}{2x}, 2x dx - 4y dy = 0, x^2 - 2y^2 = c$$

$$(3) 4(5-2) + 10(3-1) - 12(5-1) - 4(1-3) = 12m^2/s$$

$$\Gamma = \int_2^5 \int_1^3 \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy$$

$$= - \int_1^3 6 dy = -(18-6) = -12; \therefore \Gamma = -12m^2/s$$

理想流体力学演習問題 (4)

8-1-2002

by E. Yamazato

番号・氏名

1. 二次元の渦流れで、その速度成分が $v_r = 0, v_\theta = \omega r$ なるときの渦度をもとめよ。(10点)
2. 二次元非圧縮性流体の連続の式を極座標で表すと次のようになる。いま、特別な流れとして $v_r = -\mu \cos\theta / r^2$ で示される流れの v_θ および合速度をもとめよ。(10点)

$$\frac{\partial(v_r r)}{\partial r} + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0$$

(解)

1. $v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0; \psi = f(r)$
 $v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = \omega; \psi = -1/2 \omega r^2$
 $\psi = -1/2 \omega (x^2 + y^2), r^2 = x^2 + y^2$
 $\therefore \zeta = -\Lambda^2 \psi = -2\omega$

Another solution

$$u = v_\theta \sin\theta = \omega r \sin\theta = \omega y; v = -v_\theta \cos\theta = \omega x$$

$$\therefore \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -\omega - \omega = -2\omega$$

2. $\frac{\partial(-\mu \cos\theta / r^2 \times r)}{\partial r} + \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} = 0$
 $\frac{\mu \cos\theta}{r^2} + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0$
 $\therefore v_\theta = -\mu \sin\theta / r^2; V = \frac{\mu}{r^2}$

理想流体力学演習問題 (5)

8-1-2002

by E. Yamazato

番号・氏名

複素ポテンシャル $w = z^2 + z$ の流れがある。速度ポテンシャル、流れの関数を求めよ。また点 (3,2) における x,y 方向の速度成分および絶対速度を求めよ。(10点) 2. 複素ポテンシャル $w = (1+i)z$ の流れがある。速度ポテンシャル、流れの関数、x,y 方向の速度成分および絶対速度を求めよ。(10点)

(解)

$$1. \quad w = z^2 + z = (x + iy)^2 + (x + iy) = x^2 + x - y^2 + i(2xy + y)$$

$$\therefore \varphi = x^2 + x - y^2, \psi = 2xy + y$$

$$\frac{dw}{dz} = 2z + 1 = 2x + 1 + 2iy, u = 2x + 1, v = -2y$$

$$\text{At point}(3,2), \therefore u = 7, v = -4, V = 8.1$$

$$2. \quad w = (1 + i)(x + iy) = x - y + i(x + y)$$

$$\varphi = x - y, \psi = x + y, \frac{dw}{dz} = u - iv = a + i$$

$$\therefore u = 1, v = -1, V = 1.41, \alpha = -45^\circ$$

理想流体力学演習問題 (6)

8-1-2002

by E. Yamazato

番号・氏名

1. 複素ポテンシャルが次の式で表される流れについて説明せよ。(10点)

$$(1)w = aze^{-i\alpha}(\alpha > 0), (2)w = z^n(n = 1/2)$$

2. 渦なし二次元流れで、流れの関数が $\psi = 2xy$ で与えられるとき、速度ポテンシャルもよび複素ポテンシャルを求めよ (10点)

(解)

$$1.(1) \quad \frac{dw}{dz} = ae^{-\alpha} = a(\cos\alpha - i\sin\alpha) = u - iv$$

$$\therefore u = a\cos\alpha, v = a\sin\alpha, V = a$$

$$1.(2) \quad z = re^{i\theta}, w = \varphi + i\psi = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

$$\varphi = r^n \cos n\theta, \psi = r^{1/2} \cos \frac{\theta}{2}, \psi = r^{1/2} \sin \frac{\theta}{2}$$

$$2. \quad u = \frac{\partial\psi}{\partial y} = 2x = \frac{\partial\phi}{\partial x}; v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = -2y = \frac{\partial\phi}{\partial y} =$$

$$\varphi = x^2 - y^2 + c; \therefore w = \varphi + i\psi = (x^2 - y^2) + i2xy = az^2$$

理想流体力学演習問題 (7)

8-1-2002

by E. Yamazato

番号・氏名

1. ポテンシャル $w = -i\ln z + 2z$ で与えられる流れについて (1) これはどういう型の流れを組み合わせたものか。(2) 速度ポテンシャルと流れの関数を求めよ。(3) $r=1, \theta = 3\pi/2$ における速度を求めよ。(15点) 2. 複素ポテンシャルが次式で表される流れの型を説明し、かつそれらの流れの速度ポテンシャルおよび流れの関数を求めよ。(10点)
(解)

1. (1) Circulation ($\Gamma = 2\pi$) + Parallel flow ($U=2$)

$$(2) w = -i\ln(re^{i\theta}) + 2re^{i\theta} = -i\ln r + \theta + 2r(\cos\theta + i\sin\theta) \\ = (\theta + 2r\cos\theta) + i(2r\sin\theta - \ln r)$$

$$\varphi = \theta + 2r\cos\theta, \psi = 2r\sin\theta - \ln r$$

$$\frac{dw}{dz} = -\frac{i}{z} + 2 = 2 - i\frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta)$$

$$\text{At } r=1 : \theta = \frac{3\pi}{2}; \frac{dw}{dz} = 2 - i[0 - i(-1)] = 3, V = 3$$

2. Parallel flow ($U=2$) + Source flow ($Q = 6\pi$)

$$w = 2re^{i\theta} + 3\ln(re^{i\theta})$$

$$\therefore \varphi = 2r\cos\theta + 3\ln r, \psi = 2r\sin\theta + 3\theta$$

理想流体力学演習問題 (8)

8-1-2002

by E. Yamazato

番号・氏名

1. 図に示すような $4a$ の長さの平板に α なる傾きをもち、かつ循環を持つ流れがある。(1) 流れの複素ポテンシャルを求めよ。(2) 平行流れ (w -平面) から平板に至る写像関係を示し、かつ流れをスケッチせよ。(3) 平板の後端に岐点ができるようにしたときの循環値を求めよ。(20点)

(解)

$$\begin{aligned} 1. \quad w &= U\left(z_1 + \frac{a^2}{z_1}\right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z_1, \quad z_2 = z_1 e^{i\alpha}, \quad z = z_2 + \frac{a^2}{z_2} \\ \frac{dw}{dz} \frac{dz_1}{dz_2} \frac{dz_2}{dz} &= 0 \\ \left(\frac{dw}{dz}\right)_A &= U\left(1 - \frac{a^2}{z_1^2}\right) - \frac{i\Gamma}{2\pi z_1} = 0 \\ \text{At point A, } z &= 2a, \quad z_2 = a, \quad z_1 = z_2 e^{-i\alpha} = a e^{-i\alpha} \\ \left(\frac{dw}{dz}\right)_A &= U\left(1 - \frac{a^2}{a^2 e^{-2i\alpha}}\right) - \frac{i\Gamma}{2\pi a e^{-i\alpha}} = 0 \\ U(1 - e^{2i\alpha}) - \frac{i\Gamma}{2\pi a} e^{i\alpha}, \quad U(e^{-i\alpha} - e^{i\alpha}) - \frac{i\Gamma}{2\pi a} &= 0 \\ U(\cos\alpha - i\sin\alpha - \cos\alpha - i\sin\alpha) - \frac{i\Gamma}{2\pi a} &= 0 \\ \Gamma &= -4\pi a U \sin\alpha \quad (\Gamma : \text{negative}) \end{aligned}$$

理想流体力学演習問題 (8)

8-1-2002

by E. Yamazato

番号・氏名

1. 速度 U の一様流れの中に、循環 $-\Gamma$ の渦と $z = a$ に強さ Q の吹き出しがある場合 $z=0$ の渦に作用する力を求めよ。(10点)

2. 二次元ポテンシャル流れにおいて、 $z=0$ に Γ_1 $z=a$ に Γ_2 の循環がある場合、 $z=0$ および $z=a$ の渦に作用する力を求めよ。(10点)

(解)

$$\begin{aligned}
 1. \quad w &= Uz - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z + \frac{Q}{2\pi} \ln(z-a) \\
 \frac{dw}{dz} &= U - \frac{i\Gamma}{2\pi z} + \frac{Q}{2\pi(z-a)} \\
 \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 &= U^2 - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 z^2} + \frac{Q^2}{4\pi^2 z^2} + \frac{Q^2}{4\pi^2(z-a)^2} + \frac{iU\Gamma}{\pi z} \\
 &\quad + \frac{UQ}{\pi(z-a)} - \frac{i\Gamma Q}{2\pi^2 z(z-a)} - \frac{i\Gamma Q}{2\pi^2 az} - \frac{i\Gamma Q}{2\pi^2 a(z-a)} \\
 \frac{1}{z(z-a)} &= \frac{1}{a(z-a)} - \frac{1}{az} \\
 \text{At } z=0 : F_x - iF_y &= \frac{i\rho}{2} \oint \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz = \frac{i\rho}{2} \left(\frac{iU\Gamma}{\pi} - \frac{i\Gamma Q}{2\pi^2 a}\right) = -i\rho\Gamma\left(U - \frac{Q}{2\pi a}\right) \\
 F_x &= 0, F_y = \rho\Gamma\left(U - \frac{Q}{2\pi a}\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad w &= -\frac{i\Gamma_1}{2\pi} \ln x - \frac{i\Gamma_2}{2\pi} \ln(z-a) \\
 \frac{dw}{dz} &= -\frac{i\Gamma_1}{2\pi z} - \frac{i\Gamma_2}{2\pi(z-a)} \\
 \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 &= \frac{\Gamma_1^2}{4\pi^2 z^2} + \frac{\Gamma_2^2}{4\pi^2(z-a)^2} - \frac{\Gamma_1\Gamma_2}{2\pi^2 a(z-a)} + \frac{\Gamma_1\Gamma_2}{2\pi^2 a(z-a)} + \frac{\Gamma_1\Gamma_2}{2\pi^2 az} \\
 \frac{1}{z(z-a)} &= \frac{1}{a(z-a)} - \frac{1}{az} \\
 \text{At } z=0 : F_x - iF_y &= \frac{i\rho}{2} \oint \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz = i\rho 2\pi i \frac{\Gamma_1\Gamma_2}{2\pi^2 a} = -\frac{\rho\Gamma_1\Gamma_2}{2\pi a} \\
 \therefore F_x &= -\frac{\rho\Gamma_1\Gamma_2}{2\pi a}, F_y = 0 \\
 \text{At } z=a : F_x - iF_y &= \frac{i\rho}{2} \oint \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz = \frac{i\rho}{2} 2\pi i \frac{-\Gamma_1\Gamma_2}{2\pi^2 a} = \frac{\rho\Gamma_1\Gamma_2}{2\pi^2 a} = i\rho \frac{\Gamma_1\Gamma_2}{2\pi a} \\
 \therefore F_x &= \frac{\rho\Gamma_1\Gamma_2}{2\pi a}, F_y = 0
 \end{aligned}$$

—Remove afterward—

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} =$$

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} =$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} =$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} =$$

$$v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} =$$
