理想流体力学演習問題 (2)

11-28-2002

by E. Yamazato

番号・氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1. 速度成分が $u = ax + by, v = cx + dy$ で示される流れが非圧縮性流体となるための条件を示せ。また、流れが渦なし流れとした場合の流れ関数を求めよ。（１０点）2. 非圧縮性流体の速度成分が $u = ax, v = ay, w = -az$ で与えられるとすればこの流れの流線は $y^2z = const, x/y = const$ の曲面の交わりの曲線で表されることを証明せよ。（１０点）

理想流体力学演習問題 (3)

5-22-2003

by E. Yamazato

番号・氏名 ______________________

1. 吹き出し流量が Q で吹き出し点が原点にあり、さらに x 軸に平行な速度 U の流れがこれに加わった場合、この組み合わされた流れの岐点を通る流線は $\psi = Q/2$ であることを証明せよ。（１０点）2.(1) 二次元の渦流れにおいて、速度成分が u=4y,v=2x なる流れは理論上存在するか。(2) その流れの流線を求めよ (3) 直線 y=1,y=3,x=2,x=5 で区切られた長方形のまわりの循環値を求めよ。（１０点）

理想流体力学演習問題 (4)

6-5-2003

by E. Yamazato

番号・氏名

1. 二次元の渦流れで、その速度成分が $v_r = 0, v_\theta = \omega r$ なるときの渦度をもとめよ。（１０点）2. 二次元非圧縮性流体の連続の式を極座標で表すと次のようになる。いま、特別な流れとして $v_r = -\mu costheta/r^2$ で示される流れの v_θ および合速度をもとめよ。（１０点）

$$\frac{\partial(v_r r)}{\partial r} + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0$$

（解）

1. $$v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0; \psi = f(r)$$
   $$v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = \omega; \psi = -1/2\omega r^2$$
   $$\psi = -1/2\omega(x^2 + y^2), r^2 = x^2 + y^2$$
   $$\therefore \zeta = -\Lambda^2 \psi = -2\omega$$
   Another solution
   $$u = v_\theta sin\theta = \omega r sin\theta = \omega y; v = -v_\theta cos\theta = \omega x$$
   $$\therefore \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -\omega - \omega = -2\omega$$
2. $$\frac{\partial(-\mu cos\theta/r^2 \times r)}{\partial r} + \frac{\partial v_{theta}}{\partial \theta} = 0$$
   $$\frac{\mu cos\theta}{r^2} + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0$$
   $$\therefore\ v_\theta = -\mu sin\theta/r^2; V = \frac{\mu}{r^2}$$

理想流体力学演習問題 (5)

8-1-2002

by E. Yamazato

番号・氏名

複素ポテンシャル $w = z^2 + z$ の流れがある。速度ポテンシャル、流れの関数を求めよ。また点 (3,2) における x,y 方向の速度成分および絶対速度を求めよ。（１０点）2. 複素ポテンシャル $w = (1 + i)z$ の流れがある。速度ポテンシャル、流れの関数、x,y 方向の速度成分および絶対速度を求めよ。（１０点）

（解）

1. $w = z^2 + z = (x + iy)^2 + (x + iy) = x^2 + x - y^2 + i(2xy + y)$
   $\therefore \varphi = x^2; x - y^2, \psi = 2xy + y$
   $\dfrac{dw}{dz} = 2z + 1 = 2x1 + 2iy, u = 2x + 1, v = -2y$
   At point(3,2),$\therefore$ $u = 7, v = -4, V = 8.1$
2. $w = (1 + i)(x + iy) = x - y + i(x + y)$
   $\varphi = x - y, \psi = x + y, \dfrac{dww}{dz} = u - iv = a + i$
   $\therefore$ $u = 1, v = -1, V = 1.41, \alpha = -45^o$

理想流体力学演習問題 (6)

8-1-2002

by E. Yamazato

番号・氏名

1. 複素ポテンシャルが次の式で表される流れについて説明せよ。（１０点）

$$(1) w = aze^{-i\alpha}(\alpha > 0), (2) w = z^n (n = 1/2)$$

2. 渦なし二次元流れで、流れの関数が $\psi = 2xy$ で与えられるとき、速度ポテンシャルもよび複素ポテンシャルを求めよ（１０点）

（解）

1.(1) $\dfrac{dw}{dz} = ae^{-\alpha} = a(cos\alpha - isin\alpha) = u - iv$

$\therefore u = acos\alpha, v = asin\alpha, V = a$

1.(2) $z = re^{i\theta}, w = \varphi + i\psi = r^n ein\theta = r^n(cosn\theta + isinn\theta)$

$\varphi = r^n cosn\theta, \psi = r^{1/2}cos\dfrac{\theta}{2}, \psi = r^{1/2}sin\dfrac{\theta}{2}$

2. $u = \dfrac{\partial\psi}{\partial y} = 2x = \dfrac{\partial\phi}{\partial x}; v = -\dfrac{\partial\psi}{\partial x} = -2y = \dfrac{\partial\phi}{\partial x} =$

$\varphi = x^2 - y^2 + c; \therefore w = \varphi + i\psi = (x^2 - y^2) + i2xy = az^2$

理想流体力学演習問題 (7)

8-1-2002

by E. Yamazato

番号・氏名

1. ポテンシャル $w = -ilnz + 2z$ で与えられる流れについて（１）これはどういう型の流れを組み合わせたものか。（２）速度ポテンシャルと流れの関数を求めよ。（３）$r - 1, \theta = 3ı/2$ における速度を求めよ。（１５点）2. 複素ポテンシャルが次式で表される流れの型を説明し、かつそんれらの流れの速度ポテンシャルおよび流れの関数お求めよ。（１０点）

（解）

1. (1)Circulation($\Gamma = 2\pi$)+Parallel flow(U=2)

   (2)$w = -iln(re^{i\theta} + 2re^{i\theta} = -ilnr + \theta + 2r(cos\theta + isin\theta)$

   $= (\theta + 2rcon\theta) + i(2rsin\theta - lnr)$

   $\varphi = \theta + 2rcos\theta, \psi = 2rsin\theta - lnr$

   $\frac{dw}{dz} = -\frac{i}{z} + 2 = 2 - i\frac{1}{r}(cos\theta - isin\theta)$

   $Atr = 1 : \theta = \frac{3\pi}{2}; \frac{dw}{dz} = 2 - i[0 - i(-1)] = 3, V = 3$

2. Parallel flow(U=2)+Source flow($Q = 6\pi$)

   $w = 2re^{i\theta} + 3ln(re^{i\theta})$

   $\therefore \varphi = 2rcos\theta + 3lnr, \psi = 2rsin\theta + 3\theta$

理想流体力学演習問題 (8)

8-1-2002

by E. Yamazato

番号・氏名

1. 図に示すような 4a の長さの平板に α なる傾きをもち、かつ循環を持つ流れがある。(1) 流れの複素ポテンシャルを求めよ。(2) 平行流れ (w-平面) から平板に至る写像関係を示し、かつ流れをスケッチせよ。(3) 平板の後端に岐点がくるようにしたときの循環値を求めよ。（２０点）

（解）

1.
$$w = U(z_1 + \frac{a^2}{z_1}) - \frac{i\Gamma}{2\pi} ln z_1, z_2 = z_1 e^{i\alpha}, z = z_2 + \frac{a^2}{z_2}$$

$$\frac{dw}{dz}\frac{dz_1}{dz_2}\frac{dz_2}{dz} = 0$$

$$\frac{dw}{d_1})_A = U(1 - \frac{a^2}{z_1}) - \frac{i\Gamma}{2\pi z_1} = 0$$

At point A, $z = 2a, z_2 = a, z_1 = z_2 e^{-i\alpha} = ae^{-i\alpha}$

$$\frac{dw}{dz_1})_A = U(1 - \frac{a^2}{a^2 e^{-2i\alpha}}) - \frac{i\Gamma}{2\pi a e^{-i\alpha}} = 0$$

$$U(1 - e^{2i\alpha}) - \frac{i\Gamma}{2\pi a} e^{i\alpha}, U(e^{-i\alpha} - e^{i\alpha}) - \frac{i\Gamma}{2\pi a} = 0$$

$$U(cos\alpha - isin\alpha - cos\alpha - isin\alpha) - \frac{i\Gamma}{2\pi a} = 0$$

$$\Gamma = -4\pi a U sin\alpha (\Gamma : negative)$$

理想流体力学演習問題 (8)

8-1-2002

by E. Yamazato

番号・氏名

1. 速度 U の一様流れの中に、循環 $-\Gamma$ の渦と $z=a$ に強さ Q の吹き出しがある場合 z=0 の渦に作用する力を求めよ。（１０点）
2. 二次元ポテンシャル流れにおいて、z=0 に Γ_1 z=a に Γ_2 の循環がある場合、z=0 および z=a の渦に作用する力を求めよ。（１０点）

（解）

1.
$$w = Uz - \frac{i\Gamma}{2\pi}lnz + \frac{Q}{2\pi}ln(z-a)$$
$$\frac{dw}{dz} = U - \frac{i\Gamma}{2\pi z} + \frac{Q}{2\pi(z-a)}$$
$$(\frac{dw}{dz})^2 = U^2 - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2x^2} + \frac{Q^2}{4\pi^2z^2} + \frac{Q^2}{4\pi^2(z-a)^2)} + \frac{iU\Gamma}{\pi z}$$
$$+\frac{UQ}{\pi(z-a)} - \frac{i\Gamma Q}{2\pi^2z(z-a)} - \frac{i\Gamma Q}{2\pi^2az} - \frac{i\Gamma Q}{2\pi^2a(z-a)}$$
$$\frac{1}{z(z-a)} = \frac{1}{a(z-a)} - \frac{1}{az}$$
$$\text{At z=0}: F_x - iF_y = \frac{i\rho}{2}\oint(\frac{dw}{dz})^2dz = \frac{i\rho}{2}(\frac{iU\Gamma}{\pi} - \frac{i\Gamma Q}{2\pi^2a}) = -i\rho\Gamma(U - \frac{Q}{2\pi a})$$
$$F_x = 0, F_y = \rho\Gamma(U - \frac{Q}{2\pi a})$$

2.
$$w = -\frac{i\Gamma_1}{2\pi}lnx - \frac{i\Gamma_2}{2\pi}ln(z-a)$$
$$\frac{dw}{dz} = -\frac{i\Gamma_1}{2\pi z} - \frac{i\Gamma_2}{2\pi(z-a)}$$
$$(\frac{dw}{dz})^2 = \frac{\Gamma_1^2}{4\pi^2z^2} + \frac{\Gamma_2^2}{4\pi^2(z-a)^2} - \frac{\Gamma_1\Gamma_2}{2\pi^2a(z-a)} + \frac{\Gamma_1\Gamma_2}{2\pi^2a(z-a)} + \frac{\Gamma_1\Gamma_2}{2\pi^2az}$$
$$\frac{1}{z(z-a)} = \frac{1}{a(z-a)} - \frac{1}{az}$$
$$\text{At z=0}: F_x - iF_y = \frac{i\rho}{2}\oint(\frac{dw}{dz}^2)dz = i\rho 22\pi i\frac{\Gamma_1\Gamma_2}{2\pi^2a} = -\frac{\rho\Gamma_1\Gamma_2}{2\pi a}$$
$$\therefore\ F_x = -\frac{\rho\Gamma_1\Gamma_2}{2\pi a}, F_y = 0$$
$$\text{At z=a}: F_x - iF_y = \frac{i\rho}{2}\oint(\frac{dw}{dz})^2dz = \frac{i\rho}{2}2\pi i\frac{-\Gamma_1\Gamma_2}{2\pi^2a} = \frac{\rho\Gamma_1\Gamma_2}{2\pi^2a}) = i\rho\frac{\Gamma_1\Gamma_2}{2\pi a}$$
$$\therefore\ F_x = \frac{\rho\Gamma_1\Gamma_2}{2\pi a}, F_y = 0$$

————————————————-Remove afterward———

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} =$$

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} =$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} =$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

$$v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} =$$

$$v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} =$$

————————————————————————-