流体力学III試験問題

1988-9-22

by E.Yamazato

1. 速度成分が $u = ax + by,\ v = cx + dy$ で示される流れが非圧縮性流体となるための条件を示せ．また，流れが渦なし流れとした場合の流れ関数を求めよ．
2. 複素ポテンシャルが次式で表される流れの型を説明し、かつそれらの流れの速度ポテンシャルおよび流れの関数を求めよ．また、(1) の速度成分、u,v および合速度 V を求めよ。

$$(1)\ w = aze^{i\alpha}\ (\alpha > 0),\ (2)\ w = z^n\ (n = \frac{2}{3})$$

3. 複素ポテンシャルが $w = -ilnz + 2z$ で与えられる流れについて：
(1) これはどういう型の流れを組み合わせたものか
(2)Potential function, Stream function を求めよ
(3)Stagnation point(or points) を求めよ
(4)$r = 1,\ \ \theta = \frac{3}{2}\pi$ にこける速度を求めよ。
4. 図（板書）に示すような $4a$ の長さの平板に α なる傾きをもち，かつ循環をもつ流れがある．(1) 流れの複素ポテンシャルを求めよ．(2) 平行流れ (w-平面) から平板に至る写像関係を示し，かつ流れをスケッチせよ．(3) 平板の後端に岐点がくるようにしたときの循環値をを求めよ．

（解）

1.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad a + d = 0$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = ax + by, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = cx + dy$$

$$\psi = axy + \frac{b}{2}y^2 + f(x), \quad \psi = -\frac{c}{2}x^2 - dxy + f(y) = axy - \frac{c}{2}x^2 + f(y)$$

$$\psi = axy + \frac{1}{2}(by^2 - cx^2) + const.$$

For irrotational flow, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial x},\ b = c,\ \psi = axy + \dfrac{b}{2}(y^2 - x^2) + const.$

2.

(1) Parallel flow with $\theta = \alpha$

$$w = ar\{(\cos(\theta + \alpha) + i\sin(\theta + \alpha)\}$$

$$\varphi = ar\cos(\theta + \alpha), \quad \psi = ar\sin(\theta + \alpha)$$

(2) Corner flow with $\theta = \frac{3}{2}\pi$

$$z = re^{i\theta}, \quad w = \varphi + i\psi = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

$$\varphi = r^n\cos n\theta, \quad \psi = r^n\sin n\theta$$

$$For\ n=\frac{2}{3},\quad \varphi=r^{2/3}\cos\frac{2\theta}{3},\quad \psi=r^{2/3}\sin\frac{2\theta}{3}$$
$$\frac{dw}{dz}=ae^{i\alpha}=a(\cos\alpha+i\sin\alpha)=u-iv$$
$$u=a\cos\alpha,\quad v=-a\sin\alpha,\quad V=a$$

3.

(1)

$$Circulation+parallel\ flow$$

(2) $$w=-i\ln(re^{i\theta})+2re^{i\theta}=-i\ln r+\theta+2r(\cos\theta+i\sin\theta)$$
$$=(\theta+2r\cos\theta)+i(2r\sin\theta-\ln r)$$
$$\varphi=\theta+2r\cos\theta,\quad \psi=2r\sin\theta-\ln r$$

(3) $$\frac{dw}{dz}=-\frac{i}{z}+2=2-i\frac{1}{r}(\cos\theta-i\sin\theta)=0$$
$$z=\frac{i}{2}=x+iy\quad x=0\quad y=\frac{1}{2}$$

(4) At $r=1,\quad \theta=\frac{3\pi}{2};\quad \frac{dw}{dz}=2-i\{0-i(-1)\}=3,\quad V=3$

4.

$$w=U(z_1+\frac{a^2}{z_1})-\frac{i\Gamma}{2\pi}\ln z_1,\quad z_2=z_1e^{i\alpha},\quad z=z_2+\frac{a^2}{z_2}$$
$$\frac{dw}{dz_1}\frac{dz_1}{dz_2}\frac{dz_2}{dz}=0$$
$$\frac{dw}{dz_1})_A=U(1-\frac{a^2}{z_1^2})-\frac{i\Gamma}{2\pi z_1}=0$$
$$At\ point\ A,\ z=2a,\ z_2=a,\quad z_1=z_2e^{-i\alpha}=ae^{-i\alpha}$$
$$\frac{dw}{dz_1})_A=U(1-\frac{a^2}{a^2e^{-2i\alpha}})-\frac{i\Gamma}{2\pi ae^{-i\alpha}}=0$$
$$U(1-e^{2i\alpha})-\frac{i\Gamma}{2\pi a}e^{i\alpha}=0$$
$$U(e^{-i\alpha}-e^{i\alpha})-\frac{i\Gamma}{2\pi a}=0$$
$$U(\cos\alpha-i\sin\alpha-\cos\alpha-i\sin\alpha)-\frac{i\Gamma}{2\pi a}=0$$
$$\Gamma=-4\pi aU\sin\alpha\ (\Gamma:\ negative)$$