流体力学III試験問題

1971-10-13

by E. Yamazato

1. 吹き出し流量がQで、吹き出し点が原点にあり、さらにX軸に平行な速度の流れがこれに加わった場合、この組み合わされた流れの岐点とそこを通る流線は $\psi = \frac{1}{2}Q$ で示されることを示せ。また、この流れからできる楕円物体（境界壁）の最大幅を求めよ。
2. 複素ポテンシャルが $w = -ilnz + 2z$ で与えられる流れについて：
(1) これはどういう型の流れを組み合わせたものか
(2)Potential function, Stream function を求めよ
(3)Stagnation point(or points) を求めよ
(4)$r = 1,\ \ \theta = \frac{3}{2}\pi$ にこける速度を求めよ。
3. 図に示す二次元広がりダクト内を流量 $20cm^3/s$ の流体が流れている。ただし、$\rho = 2kgs^2/cm^4$ とする。
(1) もし、Potential flow とすればどういう型の流れか
(2)Potential flow の仮定の下でA点の速度を求めよ。
(3)A点における圧力勾配を求めよ
(4) 一次元流れの仮定でA点の速度を求めよ。
4. 球の中心がある時刻tでy軸の正の方向に $10m/s$ の速さで動いており、その加速度は一定で $1m/s^2$ である。いま球の半径が $y = -1m$ からの距離に逆比例するものとして球の表面の境界条件を求めよ。
(解）
1.

$$
\begin{aligned}
&\varphi = Ur\cos\theta + m\ln r, \quad \psi = Ur\sin\theta + m\theta \\
&\text{At stagnation points,} \quad U - \frac{m}{U} = 0, \quad r_s = \frac{m}{U} \\
&\psi = U\frac{m}{U}\sin\pi + m\pi = \frac{Q}{2}, \quad \psi = Ur\sin\theta + m\theta = \frac{Q}{2}
\end{aligned}
$$

2.

$$
\begin{aligned}
(1) \qquad & Circulation + parallel\ flow \\
(2) \qquad & w = -i\ln(re^{i\theta}) + 2re^{i\theta} = -i\ln r + \theta + 2r(\cos\theta + i\sin\theta) \\
& = (\theta + 2r\cos\theta) + i(2r\sin\theta - \ln r) \\
& \varphi = \theta + 2r\cos\theta, \quad \psi = 2r\sin\theta - \ln r \\
(3) \qquad & \frac{dw}{dz} = -\frac{i}{z} + 2 = 2 - i\frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta) = 0 \\
& z = \frac{i}{2} = x + iy \quad x = 0, \quad y = \frac{1}{2} \\
(4) \qquad & \text{At } r = 1, \quad \theta = \frac{3\pi}{2}; \quad \frac{dw}{dz} = 2 - i\{0 - i(-1)\} = 3, \quad V = 3
\end{aligned}
$$

3.

$$
\begin{aligned}
(1) \qquad & \varphi = \ln r, \quad v_r = \frac{m'}{r}, \quad m' = \frac{Q'}{2\pi} \\
& Q = \frac{60}{360}Q' = \frac{1}{6}Q', \quad Q' = 6Q = 6\times 20 = 120cm^3/s, \quad m' = 19cm^3/s
\end{aligned}
$$

(2) $$v_{rA} = \frac{m'}{r_A} = \frac{Q'}{2\pi r_A} = \frac{120}{(2\pi \times 20)} = 0.55cm/s$$

(3) $$v_r \frac{dv_r}{dr} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dr}, \quad \frac{dp}{dr} = -\rho v_r \left(\frac{dv_r}{dr}\right)_A = \frac{\rho m'^2}{r_A^3}$$

$$\left(\frac{dp}{dr}\right)_A = \frac{(1.204 \times 10^{-6} \times 19.1^2)}{34.6^3} = 0.01 \times 10^{-6}$$

(4) $$v_{rA} = \frac{Q}{A} = \frac{20}{40} = 0.5cm/s$$

4.

$$F = x^2 + (y - 10t - \frac{t^2}{2})^2 + z^2 - \frac{1}{(1 + 10t + t^2/2)^2)} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2(y - 10t - \frac{t^2}{2}), \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 2z$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -2(t+10)(y - 10t - \frac{t^2}{2}) + 2(1 + 10t + \frac{t^2}{2})^{-3}(t+10)$$

$$\frac{DF}{Dt} = 2ux + 2v(y - 10t - \frac{t^2}{2}) + 2wz + 2(t+10)\{(1 + 10t + \frac{t^2}{2})^{-3} - y + 10t + \frac{t^2}{2}\} = 0$$

$$ux + v(y - 10t - \frac{t^2}{2}) + wz + \{(t+10)(1 + 10t + \frac{t^2}{2})^{-3} - y + 10t + \frac{t^2}{2}\} = 0$$