流体力学III試験問題

1965-2-13

by E. Yamazato

1. 複素ポテンシャルが $w = -i ln z + 2z$ で与えられる流れについて：
(1) これはどういう型の流れを組み合わせたものか
(2)Potential function, Stream function を求めよ
(3)Stagnation point(or points) を求めよ
(4)$r = 1, \ \ \theta = \frac{3}{2}\pi$ にこける速度を求めよ。
2. 図に示すような $4a$ の長さの平板に α なる傾きをもち，かつ循環をもつ流れがある．(1) 流れの複素ポテンシャルを求めよ．(2) 平行流れ (w-平面) から平板に至る写像関係を示し，かつ流れをスケッチせよ．(3) 平板の後端に岐点がくるようにしたときの循環値をを求めよ．
3. 幅 2b の平行な二平板間を粘性流体が流れている。いま外力のポテンシャルが $\omega = gh$(h は垂直方向の長さ）で表されるものとして流れの速度を求めよ。また、この流れは速度ポテンシャルが存在することを示せ。(Hele-Shaw の流れ）なお、この運動方程式を解くにあたって用いた仮定のすべてを列記せよ。

(解）

1.

(1) $Circulation + parallel \ flow$

(2) $w = -i\ln(re^{i\theta}) + 2re^{i\theta} = -i\ln r + \theta + 2r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$= (\theta + 2r\cos\theta) + i(2r\sin\theta - \ln r)$

$\varphi = \theta + 2r\cos\theta, \quad \psi = 2r\sin\theta - \ln r$

(3) $\dfrac{dw}{dz} = -\dfrac{i}{z} + 2 = 2 - i\dfrac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta) = 0$

$z = \dfrac{i}{2} = x + iy \quad x = 0, \quad y = \dfrac{1}{2}$

(4) At $r = 1, \quad \theta = \dfrac{3\pi}{2}; \quad \dfrac{dw}{dz} = 2 - i\{0 - i(-1)\} = 3, \quad V = 3$

2.

$$w = U(z_1 + \frac{a^2}{z_1}) - \frac{i\Gamma}{2\pi}\ln z_1, \quad z_2 = z_1 e^{i\alpha}, \quad z = z_2 + \frac{a^2}{z_2}$$

$$\frac{dw}{dz_1}\frac{dz_1}{dz_2}\frac{dz_2}{dz} = 0$$

$$\frac{dw}{dz_1})_A = U(1 - \frac{a^2}{z_1^2}) - \frac{i\Gamma}{2\pi z_1} = 0$$

$$At \ point \ A, \ z = 2a, \ z_2 = a + \frac{a^2}{a} = a, \quad z_1 = z_2 e^{-i\alpha} = ae^{-i\alpha}$$

$$\frac{dw}{dz_1})_A = U(1 - \frac{a^2}{a^2 e^{-2i\alpha}}) - \frac{i\Gamma}{2\pi a e^{-i\alpha}} = 0$$

$$U(1 - e^{2i\alpha}) - \frac{i\Gamma}{2\pi a}e^{i\alpha} = 0$$

$$U(e^{-i\alpha} - e^{i\alpha}) - \frac{i\Gamma}{2\pi a} = 0$$

$$U(\cos\alpha - i\sin\alpha - \cos\alpha - i\sin\alpha) - \frac{i\Gamma}{2\pi a} = 0$$

$$\Gamma = -4\pi a U\sin\alpha \ (\Gamma : \ negative)$$

3.

流れはx方向のみとして定常流れを考えると

$$\frac{\partial u}{\partial t}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial z}=0$$

$$\frac{dp}{dx}=\mu\frac{d^2u}{dy^2}+X,\quad \frac{\partial p}{\partial y}=0,\quad \frac{dp}{dx}=const$$

$$y=\pm b:\quad u=o,\quad X=\frac{\partial}{\partial x}(gh)$$

$$\frac{d}{dx}(p+gh)=\mu\frac{d^2u}{dy^2}$$

$$u=\frac{1}{2\mu}\frac{d}{dx}(p+gh)\times(b^2-y^2)$$

$$u=\frac{\partial}{\partial x}[(p+gh)(\frac{b^2-y^2}{2\mu})]=\frac{\partial\phi}{\partial x}$$

$$\phi=(p+gh)(\frac{b^2-y^2}{2\mu})$$