流体力学III試験問題

1963-7-3

by E. Yamazato

1. 複素ポテンシャルが $w = -ilnz + 2z$ で与えられる流れについて：
(1) これはどういう型の流れを組み合わせたものか
(2)Potential function, Stream function を求めよ
(3)Stagnation point(or points) を求めよ
(4)$r = 1$, $\theta = \frac{3}{2}\pi$ にこける速度を求めよ。
2. 非圧縮性流体が平板上を定常状態で流れている。今、流れの方向に圧力が変わらないとすれば平板上の境界層内の速度分布は次のように示される。

$$\frac{u}{U} = \sin n\frac{\pi}{2}, \quad n = \frac{y}{\delta}$$

この速度分布の式は必要な境界条件 (５つ) を満足していることを示せ。
3. 二次元圧縮流ダクト（高さ１）の中を壁に平行に流れているとき、次の値を求めよ。
（１)v_{2max} と v_1 の比、(２）１．２断面の運動量比、(３）壁に沿う圧力の式
ただし、壁面抵抗は考えないものとする。また寸法は図１に示す通りとする。
4. 図に示すような $4a$ の長さの平板に α なる傾きをもち，かつ循環をもつ流れがある．(1) 流れの複素ポテンシャルを求めよ．(2) 平行流れ (w-平面) から平板に至る写像関係を示し，かつ流れをスケッチせよ．(3) 平板の後端に岐点がくるようにしたときの循環値をを求めよ．

(解)

1.

(1) $Circulation + parallel\ flow$

(2) $w = -i\ln(re^{i\theta}) + 2re^{i\theta} = -i\ln r + \theta + 2r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$= (\theta + 2r\cos\theta) + i(2r\sin\theta - \ln r)$

$\varphi = \theta + 2r\cos\theta, \quad \psi = 2r\sin\theta - \ln r$

(3) $\dfrac{dw}{dz} = -\dfrac{i}{z} + 2 = 2 - i\dfrac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta) = 0$

$z = \dfrac{i}{2} = x + iy \quad x = 0, \quad y = \dfrac{1}{2}$

(4) At $r = 1, \quad \theta = \dfrac{3\pi}{2}; \quad \dfrac{dw}{dz} = 2 - i\{0 - i(-1)\} = 3, \quad V = 3$

2.

(1) $y = 0: \quad u = 0 \quad (n = 0)$

(2) $y = \delta: \quad u = U \quad (n = 1)$

(3) $\dfrac{du}{dy} = U\dfrac{\pi}{2\delta}\cos n\dfrac{\pi}{2}$

$y = \delta: \quad \dfrac{du}{dy} = 0 \quad (n = 1)$

(4) $\dfrac{d^2u}{dy^2} = -U(\dfrac{\pi}{2\delta})\sin n\dfrac{\pi}{2}$

$$y = 0: \quad \frac{d^2u}{dy^2} = 0 \quad (n = 0)$$

(5) $$\frac{du}{dy})_{y=0} = \frac{\pi}{2\delta} \neq 0 \quad (n = 0)$$

$$y = 0: \quad \frac{du}{dy} \neq 0$$

3.

$$\rho A v_1 = \rho v_{2max}\frac{A}{2} + 2\rho v_{2max}\frac{A}{4}\frac{1}{2} = \frac{3}{4}\rho v_{2max}$$

$$\frac{v_1}{v_{2max}} = \frac{3}{4}$$

$$M_1 = \rho A v_1^2$$

$$M_2 = \rho v_{2max}^2\frac{A}{2} + 2\rho\int_0^{A/4}(v_{2max}\frac{4}{A})^2 y^2 dy$$

$$= \rho v_{2max}^2\frac{A}{2} + 2\rho(v_{2max}\frac{4}{A})^2\frac{1}{3}(\frac{A}{4})^3$$

$$\rho v_{2max}^2\frac{A}{2} + \frac{\rho}{6}v_{2max}A = \frac{2}{3}\rho A v_{2max}^2$$

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{\rho A v_1^2}{2/3\rho A v_{2max}^2} = \frac{3}{2}\frac{v_1^2}{v_{2max}^2} = \frac{27}{32}$$

$$(p_1 - p_2)A = M_2 - M_1 = \frac{2}{3}\rho A v_{2max} - \rho A v_1^2$$

$$= \rho A v_1^2(\frac{2}{3} \times \frac{16}{9} - 1) = \frac{5}{27}\rho A v_1^2$$

$$p_1 - p_2 = \frac{5}{27}\rho v_1^2$$

4.

$$w = U(z_1 + \frac{a^2}{z_1}) - \frac{i\Gamma}{2\pi}\ln z_1, \quad z_2 = z_1 e^{i\alpha}, \quad z = z_2 + \frac{a^2}{z_2}$$

$$\frac{dw}{dz_1}\frac{dz_1}{dz_2}\frac{dz_2}{dz} = 0$$

$$\frac{dw}{dz_1})_A = U(1 - \frac{a^2}{z_1^2}) - \frac{i\Gamma}{2\pi z_1} = 0$$

$$At\ point\ A,\ z = 2a,\ z_2 = a + \frac{a^2}{a} = a, \quad z_1 = z_2 e^{-i\alpha} = a e^{-i\alpha}$$

$$\frac{dw}{dz_1})_A = U(1 - \frac{a^2}{a^2 e^{-2i\alpha}}) - \frac{i\Gamma}{2\pi a e^{-i\alpha}} = 0$$

$$U(1 - e^{2i\alpha}) - \frac{i\Gamma}{2\pi a}e^{i\alpha} = 0$$

$$U(e^{-i\alpha} - e^{i\alpha}) - \frac{i\Gamma}{2\pi a} = 0$$

$$U(\cos\alpha - i\sin\alpha - \cos\alpha - i\sin\alpha) - \frac{i\Gamma}{2\pi a} = 0$$

$$\Gamma = -4\pi a U\sin\alpha \ (\Gamma: \ negative)$$