4-1. 二枚の板が距離を平行に保って置かれ，その間を油（粘性係数 $= 0.0294 Pas$ ）で満たしている．いま一方の板を固定し，他方の板をそれに平行に等速度で動かす．板の間の油の速度が直線的に変化するならば，板を動かすためには単位面積当りいくらの力が必要か．

（解）

$$\tau = \mu \frac{V}{h} = 0.0294 \times \frac{50}{0.05} = 29.4 N/m^2$$

4-2. 質量 $3kg$, 一辺の長さ $150mm$ の立方体が鉛直におかれた二枚の平行平板の間を $15cm/s$ の速さで降下している．平板と立方体の間は油で潤滑され，油膜の厚さは $0.3mm$ である．油の粘性係数を求めよ．

（解）

$$\tau = \frac{mg}{2a^2} = \frac{3g}{2 \times 0.15^2} = 654 N/m^2$$

$$\mu = \frac{\tau}{du/dy} = \frac{654}{500} = 1.31 Pas$$

4-3. 二重円筒の間に粘性係数 $1.47Pas$ の油が満たしてある．円筒の直径を $50mm$, 長さを $100mm$, すき間を $1mm$ とし，円筒を $10rpm$ で回転するとき外円筒を静止させておくのに要するトルクを求めよ．

（解）

$$u = \frac{\pi d N}{60} = 26.17 \times 10^{3} m/s, \quad \omega = \frac{2\pi N}{60} = 1.047$$

$$F = \mu \frac{u}{h} \times \pi d l = 0.604N$$

$$T = Fr = 0.604 \times 25 \times 10^{-3} = 0.015Nm, \quad L = T\omega = 0.0157w$$

4-8. 物体が粘性係数 $0.986Pas$, 密度 $900kg/m^3$ の油中を $10m/s$ の速度で水平に移動している．この物体の 5 倍の大きさの物体を水温 30^oC の水中で移動させるとき，流れの状態を相似に保つには第 2 の物体の速度をいくらにしたらよいか．

（解）

$$\mu_1 = 0.986Pas, \rho_1 = 960kg/m^3, \quad v_1 = 10m/s$$

$$At\ 30^oC, \quad \mu_2 = 0.793mPas, \quad \rho_2 = 995.7kg/m^3$$

$$R_e = \frac{995.7 v_2 5 L_1}{0.7973 \times 10^{-3}} = \frac{960 \times 10 \times L_1}{0.986}, \quad v_2 = 1.559mm/s$$

4-9. 長さ $245m$ のコンテナ船が 28 ノット（1 ノットは $0.514m/s$）の速さで航行するときのフルード数を求めよ．またフルード数を等しくする相似条件の下で 1/25 の模型で実験するとすれば，水槽中の模型の曳航速度はいくらにすればよいか．

（解）

$$L_1 = 245m, \quad v_1 = 28knot = 14.392m/s, \quad L_2 = \frac{L_1}{25}$$

$$Fr = \frac{v_1}{\sqrt{L_1 g}} = \frac{v_2}{\sqrt{(L_1/25)g}}, \quad v_2 = \frac{v_1}{5} = 2.88m/s$$

4-10. 図に示す単位幅のせきを超えて流れる流量 Q を表す式を求めよ．ただし図に示す物理量のほか，関連するものは重力の加速度 g のみとする．

（解）

$$Q,\ H,\ D,\ g$$

$$n = 4,\ i = 2,\ m = n - i = 2\ (n,\ d,\ \rho - primary\ variables)$$

$$\pi_1 = Q^\alpha H^\beta g^\gamma = L^{2\alpha} T^{-\alpha} L^\beta L^\gamma T^{-2\gamma}$$

$$L:\ 2\alpha + \beta + \gamma = 0, \quad T:\ -\alpha - 2\gamma = 0$$

$$\alpha = 1(take), \quad \beta = -\frac{3}{2}, \quad \gamma = -\frac{1}{2}$$

$$\pi_1 = \frac{Q}{\sqrt{gH^3}}$$

$$\pi_2 = Q^\alpha H^\beta D^\gamma = L^{2\alpha} T^{-\alpha} L^\beta L^\gamma$$

$$L:\ 2\alpha + \beta + \gamma = 0, \quad T:\ -\alpha = 0$$

$$\beta = -\gamma, \quad \pi_2 = (\frac{H}{D})^\beta$$

$$\pi_1 = \varphi(\pi_2) = \varphi(\frac{H}{D}), \quad Q = \varphi(\frac{H}{D})\sqrt{gH^3}$$

4-11. 遠心ポンプの流量，回転数，羽根車の直径，圧力，密度，粘性係数を物理量として次元解析より関連式を求めよ．

（解）

$$Q,\ n,\ d,\ p,\ \rho\ \mu,\ n = 6,\ i = 3,\ m = 3$$

$$\pi_1 = Q^\alpha n^\beta d^\gamma \rho^\delta, \quad \mu^\alpha n^\beta d^\gamma \rho^\delta, \quad p^\alpha n^\beta d^\gamma \rho^\delta$$

$$\pi_1 = L^{3\alpha} T^{-\alpha} T^{-\beta} L^\gamma M^\delta L^{-3\delta}$$

$$L:\ 3\alpha + \gamma - 3\delta = 0, \quad M:\ \delta = 0, \quad T:\ -\alpha - \beta = 0$$

$$\alpha = 1, \quad \beta = -1, \quad \gamma = -3, \quad \delta = 0, \quad \pi_1 = \frac{Q}{nd^3}$$

$$\pi_2 = M^\alpha L^{-\alpha} T^{-\alpha} T^{-\beta} L^\gamma M^\delta L^{-3\delta}$$

$$L:\ -\alpha + \gamma - 3\delta = 0, \quad M:\ \alpha + \delta = 0, \quad T:\ -\alpha - \beta = 0$$

$$\alpha = -1(take), \quad \beta = 1, \quad \gamma = 2, \quad \delta = 1, \quad \pi_2 = \frac{nd^2}{\nu}$$

$$\pi_3 = M^\alpha L^{-\alpha} T^{-2\alpha} T^{-\beta} L^\gamma M^\delta L^{-3\delta}$$

$$L:\ -\alpha+\gamma-3\delta=0,\quad M:\ \alpha+\delta=0,\quad T:\ -2\alpha-\beta=0$$

$$\alpha=1(take),\quad \beta=-2,\quad \gamma=-2,\quad \delta=-1$$

$$\pi_3=\frac{p}{n^2d^2\rho},\quad \frac{Q}{nd^3}=\varphi(\frac{nd^2}{\nu},\frac{p}{n^2d^2\rho})$$

4-12. 水深が波長に比較して十分小さい場合の波，すなわち長い波の伝播速度を与える式を次元解析によって求めよ．

（解）

$$\pi=a^\alpha h^\beta g^\gamma=L^\alpha T^{-\alpha}L^{beta}L^\gamma T^{-2\gamma}(n=3,i=2,m=1)$$

$$L:\ \alpha+\beta+\gamma=0,\quad T:\ -\alpha-2\gamma=0$$

$$\alpha=1,\quad \beta=-\frac{1}{2},\quad \gamma=-\frac{1}{2}$$

$$\pi_1=\frac{a}{\sqrt{gh}}=k,\quad a=k\sqrt{gh}$$

4-13. 20^oC の水中で，長さ $0.8m$ の平板をその面に平行に $3m/s$ の速度で動かす場合，板の中央および後端における摩擦応力と摩擦係数を求めよ．

（解）

$$\nu=1.004\times10^{-6}m^2/s\ at\ 20^oC$$

$$\tau_{wl}=\frac{0.73(10^3\times3^2)}{2}\sqrt{10^{-6}/(3\times0.8)}=21.2Pa$$

$$\tau_{w(l/2)}=2.998Pa$$

$$C_{fl}=\frac{1.462}{\sqrt{2.4\times10^{-6}}}=0.943\times10^3$$

$$C_{f(l/2)}=\frac{1.462}{\sqrt{2.4\times10^{-6}}}=1.335\times10^3$$

4-14. 流速 $10m$ の流れの中にある平板の層流境界層厚さを 20^oC, 標準気圧の空気の場合と水の場合に付いて求めよ．ただし動粘性係数は水で $10^{-6}m^2/s$, 空気で $15\times10^{-6}m^2/s$ とする．平板前縁からの距離 x が同じ位置で，空気の場合の境界層厚さは水の場合の何倍になるか．また前縁から遷移点までの距離を，空気と水のそれぞれの場合について求めよ．ただし遷移レイノルズ数を 3.2×10^5 とする．

（解）

$$\delta_w=5.48\sqrt{\frac{10^{-6}x}{10}}=5.48\times10^{-3.5}\sqrt{x}=1.73\times10^{-3}\sqrt{x}$$

$$\delta_a=1.73\times10^{-3}\times3.87\sqrt{x}$$

$$\frac{\delta_a}{\delta_w}=3.87,\quad R_{et}=3.2\times10^5=\frac{10x_t}{\nu}$$

$$x_{tw}=3.2\times10^{-2}=0.032m,\quad x_{ta}=0.48m$$

4-15. 長さ $1.5m$，幅 $1.5m$ の滑かな平板を，水中において時速 $10km$ の速度で曳航するとき，平板に働く摩擦抗力および所要動力はいくらになるか．ただし水の動粘性係数を $10^{-6}m^2/s$, 遷移レイノルズ数を 5×10^{-5} とする．

（解）

$$R_e = \frac{2.78 \times 1.5}{10^{-6}} = 4.17 \times 10^6 > 5 \times 10^5$$

$$C_f = 0.455(logR_{el})^{-2.58} = 3.469 \times 10^{-3}$$

$$D = C_f \frac{1}{2}\rho V^2(2bl) = 60.32N, L = Dv = 167.7w$$

$$D = 0.036\rho V^2(2bl)(\frac{Vl}{\nu})^{-1/5}$$

$$= 0.036 \times 10^3 \times 2.78^2(2 \times 1.5^2)(4.17 \times 10^6)^{-1/5} = 59.28N$$

$$L = DV = 164.8w$$

4-16. 流速の一様流れに平行のにおかれた平板において，層流境界層内の速度分布がが次式で表されるとき，排除厚さ，運動量厚さ，形状係数，壁面せん断応力および平板の摩擦抗力を求めよ．

$$\frac{u}{V} = sin\frac{\pi}{2}\frac{y}{\delta}$$

（解）

$$\frac{u}{V} = sin\frac{\pi}{2}\frac{y}{\delta}, \quad \frac{y}{\delta} = \eta, \qquad dy = \delta d\eta$$

$$\delta^* = \int_0^\delta (1 - sin\frac{\pi}{2}\frac{y}{\delta})dy = \delta\int_0^1 (1 - sin\frac{\pi}{2}\eta)d\eta$$

$$= \delta(\eta + \frac{2}{\pi}cos\eta) \mid_0^1 = \delta(1 + 0 - 0 - \frac{2}{\pi}) = 0.363\delta$$

$$\theta = \delta\int_0^1 sin\frac{\pi}{2}\eta(1 - sin\frac{\pi}{2}\eta)d\eta$$

$$= \delta - \frac{2}{\pi}cos\eta - \frac{1}{\pi}(\frac{\pi}{2} - sin\frac{\pi}{2}cos\frac{\pi}{2}) \mid_0^1 = \delta(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2}) = 0.137\delta$$

$$H = \frac{\delta^*}{\theta} = 2.65$$

$$\tau_0 = \mu(\frac{dv}{dy})_{y=0} = \frac{\mu V\pi}{2\delta}$$

$$\tau_0 = \rho V^2\frac{d\theta}{dx} = 0.137\rho V^2\frac{d\delta}{dx} = \frac{\mu V\pi}{2\delta}$$

$$2\delta d\delta = \frac{\pi}{0.137}\frac{\nu}{V}dx$$

$$\delta^2 = 22.93\frac{\nu}{V}x + c, \quad \delta = 4.79\sqrt{\frac{\nu x}{V}}$$

$$D = \int_0^l \tau_0 dx = \rho V^2 \theta = 0.137\rho V^2 (4.79\sqrt{\frac{\nu l}{V}}) = 0.656\rho V^2 \sqrt{\frac{\nu l}{V}}$$

$$C_f = \frac{D}{(1/2)\rho V^2 l} = \frac{1.312}{\sqrt{R_{el}}}$$

4-16-1. 流速の一様流れに平行のにおかれた平板において，層流境界層内の速度分布がが次式で表されるとき，排除厚さ，運動量厚さ，形状係数，壁面せん断応力および平板の摩擦抗力を求めよ.（富田，水力学，p118；池森，水力学，p279）

$$\frac{v}{V} = \frac{3}{2}\eta - \frac{1}{2}\eta^3$$

（解）

$$\frac{v}{V} = sin\frac{3}{2}\eta - \frac{1}{2}\eta^3, \quad \frac{y}{\delta} = \eta, \quad dy = \delta d\eta$$

$$\delta^* = \int_0^\delta (1 - \frac{v}{V})dy = \delta \int_0^1 (1 - \frac{3}{2}\eta - \frac{1}{2}\eta^3)d\eta = \frac{3}{8}\delta$$

$$\theta = \delta \int_0^1 (1 - \frac{3}{2}\eta - \frac{1}{2}\eta^3)(\frac{3}{2}\eta - \frac{1}{2}\eta^3)d\eta = 0.139\delta$$

$$H = \frac{\delta^*}{\theta} = 2.69$$

$$\tau_0 = \mu(\frac{dv}{dy})_{y=0} = \frac{3}{2}\frac{\mu V}{\delta}$$

$$\tau_0 = \rho V^2 \frac{d\theta}{dx} = 0.139\rho V^2 \frac{d\delta}{dx} = \frac{3}{2}\frac{\mu V}{\delta}$$

$$\delta d\delta = 10.79\frac{\nu}{V}dx, \quad \frac{\delta^2}{2} = 10.79\frac{\nu}{V}x + c$$

$$\frac{\delta}{x} = 4.69\sqrt{\frac{\nu}{Vx}} = \frac{4.65}{\sqrt{R_{ex}}}, \quad R_{ex} = \frac{Vx}{\nu}$$

$$\tau_0 = 0.323\sqrt{\frac{\mu\rho V^3}{x}}$$

$$D = \int_0^l \tau_0 dx = \rho V^2 \theta = 0.645\rho V^2 \sqrt{\frac{\nu l}{V}}$$

$$C_f = \frac{D}{(1/2)\rho V^2 l} = \frac{1.292}{\sqrt{R_{el}}}, \quad R_{el} = \frac{Vl}{\nu}$$

4-16-2. 次の速度分布に対する排除厚さ，運動量厚さおよび形状係数を求めよ.

$$(1)\ \frac{u}{U} = 2\frac{y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2}, \quad (2)\ \frac{u}{U} = (\frac{y}{\delta})^{1/7}$$

（解）

$$(1)\ \delta^* = \int_0^\delta (1 - \frac{u}{U})dy = \int_0^\delta (1 - \frac{2y}{\delta} + \frac{y^2}{\delta^2})dy = \frac{\delta}{3}$$

$$\frac{\delta^*}{\delta} = \frac{1}{3}$$

$$\theta = \int_0^\delta \frac{u}{U}(1 - \frac{u}{U})dy = \delta \int_0^1 (2\eta - \eta^2) - (2\eta - \eta^2)^2 d\eta$$

$$= \delta \int_0^1 (2\eta - 5\eta^2 + 4\eta^3 - \eta^4) = \delta(1 - \frac{5}{3} + 1 - \frac{1}{5}) = \frac{2}{15}\delta$$

$$\frac{\theta}{\delta} = \frac{2}{15}$$

$$H = \frac{\delta^*}{\theta} = \frac{1}{3} \times \frac{15}{2} = 2.5$$

(2) $\delta^* = \int_0^1 [1 - (\frac{y}{\delta})^{1/7}]dy = \frac{\delta}{8}$

$$\frac{\delta^*}{\delta} = \frac{1}{8}$$

$$\theta = \delta \int_0^1 (\eta^{1/7} - \eta^{2/7}) = \delta(\frac{7}{8} - \frac{7}{9})\frac{7}{72}\delta$$

$$\frac{\theta}{\delta} = \frac{7}{72}$$

$$H = \frac{\delta^*}{\theta} = \frac{1}{8} \times \frac{72}{7} = 1.286$$

4-16-3. 乱流境界層内の速度分布が次式で与えられるとき，排除厚さ，運動量厚さおよび形状係数をそれぞれ境界層厚さの比で表せ.（宮井，水力学，p155）

$$\frac{u}{U} = (\frac{y}{\delta})^{1/n}$$

（解）

$$\delta^* = \int_0^\delta [1 - (\frac{y}{\delta})^{1/n}]dy =| y - \frac{n}{n+1}(\frac{y}{\delta})^{1/n} y \,|_0^\delta = \delta - \frac{n}{n+1}\delta$$

$$\frac{\delta^*}{\delta} = \frac{1}{n+1}$$

$$\theta = \int_0^\delta (\frac{y}{\delta})^{1/n}[1 - (\frac{y}{\delta})^{1/n}]dy =| [\frac{n}{n+1}(\frac{y}{\delta})^{1/n}] - \frac{n}{n+2}(\frac{y}{\delta})^{2/n} y \,|_0^\delta$$

$$= \frac{n}{n+1}\delta - \frac{n}{n+2}\delta = \frac{n}{(n+1)(n+2)}\delta$$

$$\frac{\theta}{\delta} = \frac{n}{(n+1)(n+2)}, \quad H = \frac{\delta^*}{\theta} = \frac{n+2}{n}$$

If n=7, H=1.286

Note: $H = 1.2 \sim 1.5$ for constant pressure flow

$H = 2 \sim 3$ for separated flow.

4-16-4. 滑かな平板上に生じた層流境界層の速度分布が次式で示されるとき，次の値を求めよ．係数 $a, b, \delta, \delta^*, \tau_o$ および C_f を表す式．(森川，流れ学， p 92)

$$\frac{v}{U} = a\frac{y}{\delta} + b(\frac{y}{\delta})^3$$

（解）

(1) $u = U: \quad y = \delta: \quad 1 = a + b$

$\frac{du}{dy})_{y=\delta} = 0: \quad y = \delta: \quad 0 = a + 3b$

$a = \frac{3}{2},\ b = \frac{1}{2}$

$\frac{v}{U} = \frac{3}{2}\eta - \frac{1}{2}\eta^3, \quad \frac{y}{\delta} = \eta, \quad dy = \delta d\eta$

(2) $\delta^* = \int_0^\delta (1 - \frac{u}{U})dy = \delta\int_0^1 (1 - \frac{3}{2}\eta - \frac{1}{2}\eta^3)d\eta = \frac{3}{8}\delta$

$\frac{\delta^*}{x} = \frac{1.74}{\sqrt{R_{ex}}}$

$\theta = \delta\int_0 1(1 - \frac{3}{2}\eta - \frac{1}{2}\eta^3)(\frac{3}{2}\eta - \frac{1}{2}\eta^3)d\eta = 0.139\delta$

$H = \frac{\delta^*}{\theta} = 2.69$

$\tau_o = \mu(\frac{dv}{dy})_{y=0} = \frac{3}{2}\frac{\mu U}{\delta}$

$\tau_0 = \rho U^2\frac{d\theta}{dx} = 0.139\rho U^2\frac{d\delta}{dx}$

$\frac{3}{2}\frac{\mu U}{\delta} = 0.139\rho U^2\frac{d\delta}{dx}$

$\delta d\delta = 10.79\frac{\nu}{U}dx$

$\frac{\delta^2}{2} = 10.79\frac{\nu}{U}x + c$

$\frac{\delta}{x} = 4.65\sqrt{\frac{\nu}{Ux}} = \frac{4.65}{\sqrt{R_{ex}}}, \quad R_{es} = \frac{Ux}{\nu}$

$\tau_o = 0.323\sqrt{\frac{\mu\rho U^3}{x}}$

(3) $D = \int_0^l \tau_o dx = \rho U^2\theta = 0.645\rho U^2\sqrt{\frac{\nu l}{U}}$

$C_f = \frac{D}{(1/2)\rho U^2 l} = \frac{1.292}{\sqrt{R_{el}}}, \quad R_{el} = \frac{Ul}{\nu}$

4-17. 内径 $20cm$ の滑らかな円管に 10^oC の水を平均で流す場合，最大流速，管壁面上の摩擦応力および粘性底層の厚さを求めよ．

（解）

$$V = u^*(5.75log\frac{Ru^*}{\nu} + 1.75)$$

$$0.6 = u^*[5.75log(0.1 \times 10^6/1.3) + 1.75 + 5.75logu^*]$$

$$= u^*(29.84 + 5.75logu^*), \quad u^* = 0.029m/s$$

$$U = V + 3.75u^* = 0.6 + 3.75 \times 0.029 = 0.71m/s$$

$$R_e = \frac{0.6 \times 0.2 \times 10^6}{1.3} = 9.23 \times 10^4 < 10^5$$

$$\lambda = 0.3164R_e^{-1/4} = 0.01815$$

$$u^* = \sqrt{\frac{\lambda}{8}}V, \quad u^* = 0.029m/s$$

$$U = V + 3.75u^* = 0.71m/s$$

$$\tau_0 = \rho u^{*2} = 10^3 \times 0.029^2 = 0.84Pa$$

$$\delta_s = \frac{5\nu}{u^*} = \frac{5 \times 1.3 \times 10^{-6}}{0.029} = 0.224mm$$