完全流体力学試験問題

by E. Yamazato

9-22-1994, 12:45〜14:25

1. (30) 複素ポテンシャルが次式で表される流れの型を説明し、かつそれらの流れの速度ポテンシャルおよび流れの関数を求めよ．

$$(1)\ w = aze^{i\alpha}\ (\alpha > 0),\ (2)\ w = z^n\ (n = \frac{2}{3})$$

$$(3)\ w = -i\ln z + 5z,\ (4)\ w = 3z + 2\ln z$$

2. (20) 速度成分が $u = x + y, v = x^2 - y$ で表される流れにおいて $x = \pm 2, y = \pm 2$ の直線からなる正方形の回りの循環値を求めよ。3. (25) 速度 U の一様流れ中に強さ Q の吹き出しが原点にある場合、この流れ場に作用する力を求めよ．

4. (25) 図（板書）に示すような $4a$ の長さの平板に α なる傾きをもち，かつ循環をもつ流れがある．(1) 流れの複素ポテンシャルを求めよ．(2) 平行流れ (w-平面) から平板に至る写像関係を示し，かつ流れをスケッチせよ．(3) 平板の後端に岐点がくるようにしたときの循環値をを求めよ．

完全流体力学試験問題

by E. Yamazato

9-22-1994, 12:45∼14:25

1. (30) 複素ポテンシャルが次式で表される流れの型を説明し、かつそれらの流れの速度ポテンシャルおよび流れの関数を求めよ.

$$(1)\ w = aze^{i\alpha}\ (\alpha > 0),\ (2)\ w = z^n\ (n = \frac{2}{3})$$

$$(3)\ w = -i\ln z + 5z,\ (4)\ w = 3z + 2\ln z$$

（解）

(1) Parallel flow with $\theta = \alpha$

$w = ar\{(\cos(\theta+\alpha) + i\sin(\theta+\alpha)\}$

$\varphi = ar\cos(\theta+\alpha), \quad \psi = ar\sin(\theta+\alpha)$

$\dfrac{dw}{dz} = ae^{i\alpha} = a(\cos\alpha + i\sin\alpha) = u - iv$

$u = a\cos\alpha, \quad v = -a\sin\alpha, \quad V = a$

(2) Corner flow with $\theta = \frac{3}{2}\pi$

$z = re^{i\theta}, \quad w = \varphi + i\psi = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$

$\varphi = r^n\cos n\theta, \quad \psi = r^n\sin n\theta$

$For\ n = \dfrac{2}{3}, \quad \varphi = r^{2/3}\cos\dfrac{2\theta}{3}, \quad \psi = r^{2/3}\sin\dfrac{2\theta}{3}$

(3) Parallel (U=5)+circulation($\Gamma = 2\pi$) flow

$w = -i\ln(re^{i\theta}) + 5re^{i\theta} = -i\ln r + \theta + 5r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$\varphi = \theta + 5r\cos\theta, \quad \psi = 5r\sin\theta - \ln r$

(4) Parallel flow(U=3)+source flow($Q = 4\pi$)

$w = 3re^{i\theta} + 2\ln(re^{i\theta})$

$\varphi = 3r\cos\theta + 2\ln r, \quad \psi = 3r\sin\theta + 2\theta$

2. (20) 速度成分が $u = x + y, v = x^2 - y$ で表される流れにおいて $x = \pm 2, y = \pm 2$ の直線からなる正方形の回りの循環値を求めよ。

（解）

$$
\begin{aligned}
&\Gamma = \int\int (\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}) dxdy \\
&= \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} (2x-1)dxdy = \int_{-2}^{2}(x^2 - x)|_{-2}^{2} dy \\
&= -4y|_{-2}^{2} = -16
\end{aligned}
$$

3. (25) 速度 U の一様流れ中に強さ Q の吹き出しが原点にある場合、この流れ場に作用する力を求めよ．

（解）

$$
\begin{aligned}
&w = Uz + m\ln z, \quad m = \frac{Q}{2\pi} \\
&\frac{dw}{dz} = U + \frac{m}{z} \\
&(\frac{dw}{dz})^2 = U^2 + \frac{m^2}{z^2} + \frac{2Um}{z} \\
&F_x - iF_y = \frac{i\rho}{2}\oint (\frac{dw}{dz})^2 dz = \frac{i\rho}{2} 2Um(2\pi i) \\
&F_x = -\rho UQ, \quad F_y = 0
\end{aligned}
$$

4. (25) 図（板書）に示すような $4a$ の長さの平板に α なる傾きをもち，かつ循環をもつ流れがある．(1) 流れの複素ポテンシャルを求めよ．(2) 平行流れ (w-平面) から平板に至る写像関係を示し，かつ流れをスケッチせよ．(3) 平板の後端に岐点がくるようにしたときの循環値をを求めよ．

（解）

$$
\begin{aligned}
&w = U(z_1 + \frac{a^2}{z_1}) - \frac{i\Gamma}{2\pi}\ln z_1, \quad z_2 = z_1 e^{i\alpha}, \quad z = z_2 + \frac{a^2}{z_2} \\
&\frac{dw}{dz_1}\frac{dz_1}{dz_2}\frac{dz_2}{dz} = 0 \\
&\frac{dw}{dz_1})_A = U(1 - \frac{a^2}{z_1^2}) - \frac{i\Gamma}{2\pi z_1} = 0 \\
&At\ point\ A,\ z = 2a,\ z_2 = a, \quad z_1 = z_2 e^{-i\alpha} = ae^{-i\alpha} \\
&\frac{dw}{dz_1})_A = U(1 - \frac{a^2}{a^2 e^{-2i\alpha}}) - \frac{i\Gamma}{2\pi a e^{-i\alpha}} = 0 \\
&U(1 - e^{2i\alpha}) - \frac{i\Gamma}{2\pi a} e^{i\alpha} = 0 \\
&U(e^{-i\alpha} - e^{i\alpha}) - \frac{i\Gamma}{2\pi a} = 0 \\
&U(\cos\alpha - i\sin\alpha - \cos\alpha - i\sin\alpha) - \frac{i\Gamma}{2\pi a} = 0 \\
&\Gamma = -4\pi a U\sin\alpha\ (\Gamma :\ negative)
\end{aligned}
$$