

完全流体力学試験問題

1994-9-22, 12:45~14:25

by E. Yamazato

1. (30) 複素ポテンシャルが次式で表される流れの型を説明し、かつそれらの流れの速度ポテンシャルおよび流れの関数を求めよ.

$$(1) w = aze^{i\alpha} (\alpha > 0), (2) w = z^n (n = \frac{2}{3})$$

$$(3) w = -i \ln z + 5z, (4) w = 3z + 2 \ln z$$

2. (20) 速度成分が $u = x + y, v = x^2 - y$ で表される流れにおいて $x = \pm 2, y = \pm 2$ の直線からなる正方形の回りの循環値を求めよ. 3. (25) 速度 U の一様流れ中に強さ Q の吹き出しが原点にある場合、この流れ場に作用する力を求めよ.

4. (25) 図 (板書) に示すような $4a$ の長さの平板に α なる傾きをもち、かつ循環をもつ流れがある. (1) 流れの複素ポテンシャルを求めよ. (2) 平行流れ (w -平面) から平板に至る写像関係を示し、かつ流れをスケッチせよ. (3) 平板の後端に岐点ができるようにしたときの循環値を求めよ.

(解)

1.

(1) Parallel flow with $\theta = \alpha$

$$w = ar\{(\cos(\theta + \alpha) + i \sin(\theta + \alpha))\}$$

$$\varphi = ar \cos(\theta + \alpha), \quad \psi = ar \sin(\theta + \alpha)$$

$$\frac{dw}{dz} = ae^{i\alpha} = a(\cos \alpha + i \sin \alpha) = u - iv$$

$$u = a \cos \alpha, \quad v = -a \sin \alpha, \quad V = a$$

(2) Corner flow with $\theta = \frac{3}{2}\pi$

$$z = re^{i\theta}, \quad w = \varphi + i\psi = r^n e^{in\theta} = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

$$\varphi = r^n \cos n\theta, \quad \psi = r^n \sin n\theta$$

$$\text{For } n = \frac{2}{3}, \quad \varphi = r^{2/3} \cos \frac{2\theta}{3}, \quad \psi = r^{2/3} \sin \frac{2\theta}{3}$$

(3) Parallel ($U=5$)+circulation($\Gamma = 2\pi$) flow

$$w = -i \ln(re^{i\theta}) + 5re^{i\theta} = -i \ln r + \theta + 5r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$\varphi = \theta + 5r \cos \theta, \quad \psi = 5r \sin \theta - \ln r$$

(4) Parallel flow($U=3$)+source flow($Q = 4\pi$)

$$w = 3re^{i\theta} + 2 \ln(re^{i\theta})$$

$$\varphi = 3r \cos \theta + 2 \ln r, \quad \psi = 3r \sin \theta + 2\theta$$

2.

$$\begin{aligned} \Gamma &= \int \int \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \int_{-2}^2 \int_{-2}^2 (2x - 1) dx dy = \int_{-2}^2 (x^2 - x)|_{-2}^2 dy \\ &= -4y|_{-2}^2 = -16 \end{aligned}$$

3.

$$w = Uz + m \ln z, \quad m = \frac{Q}{2\pi}$$

$$\frac{dw}{dz} = U + \frac{m}{z}$$

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 = U^2 + \frac{m^2}{z^2} + \frac{2Um}{z}$$

$$F_x - iF_y = \frac{i\rho}{2} \oint \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz = \frac{i\rho}{2} 2Um(2\pi i)$$

$$F_x = -\rho UQ, \quad F_y = 0$$

4.

$$w = U\left(z_1 + \frac{a^2}{z_1}\right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z_1, \quad z_2 = z_1 e^{i\alpha}, \quad z = z_2 + \frac{a^2}{z_2}$$

$$\frac{dw}{dz_1} \frac{dz_1}{dz_2} \frac{dz_2}{dz} = 0$$

$$\left(\frac{dw}{dz_1}\right)_A = U\left(1 - \frac{a^2}{z_1^2}\right) - \frac{i\Gamma}{2\pi z_1} = 0$$

At point A, $z = 2a$, $z_2 = a$, $z_1 = z_2 e^{-i\alpha} = a e^{-i\alpha}$

$$\left(\frac{dw}{dz_1}\right)_A = U\left(1 - \frac{a^2}{a^2 e^{-2i\alpha}}\right) - \frac{i\Gamma}{2\pi a e^{-i\alpha}} = 0$$

$$U(1 - e^{2i\alpha}) - \frac{i\Gamma}{2\pi a} e^{i\alpha} = 0$$

$$U(e^{-i\alpha} - e^{i\alpha}) - \frac{i\Gamma}{2\pi a} = 0$$

$$U(\cos \alpha - i \sin \alpha - \cos \alpha - i \sin \alpha) - \frac{i\Gamma}{2\pi a} = 0$$

$$\Gamma = -4\pi a U \sin \alpha \quad (\Gamma : \text{negative})$$