完全流体力学 試験問題

1990-9-21, 10:30〜12:00

by E. Yamazato

1. 図に示すような流線図より, この流れはどういう型の流れを組み合わせたものかを説明せよ. また数値も含めた複素ポテンシャルを求めよ.
2. 図に示す二次元ディフューザ内を流量 $20cm^3/s$ の空気が流れている．いま空気の密度を $1.204kg/m^3$ として次の値を求めよ．(1) もし流れがポテンシャル流れとすればどういう型の流れか．(2) ポテンシャル流れとして A 点における速度を求めよ．(3) A 点における圧力勾配を求めよ．(3) 一次元の流れと仮定したときの A 点の速度を求めよ．
3. 複素ポテンシャルが次式で表される流れの型を説明し、かつそれらの流れの速度ポテンシャルおよび流れの関数を求めよ．

$$(1)\ w = aze^{i\alpha}\ (\alpha > 0),\ (2)\ w = z^n\ (n = \frac{1}{2}),\ (3)\ w = -5i\ln z + 3z,\ (4)\ w = 2z + 3\ln z$$

4. 速度 U の一様流れの中に、循環 $-\Gamma$ の渦と $z = a$ に強さ Q の吹き出しがある場合 z=0 の渦に作用する力を求めよ。（１０点）

（解）

1.

$$w = iUz + m\ln\frac{z - z_2}{z - z_1},\ z_1 = 0,\ z_2 = 3 + 4i$$

$$U = 4m/s,\ m = \frac{Q}{2\pi} = \frac{27 \times 1 \times 4}{2\pi} = \frac{54}{\pi}$$

$$w = i4z + \frac{54}{\pi}\ln[1 - \frac{3 + 4i}{z}]$$

2.

$$(1)\ \varphi = \ln r, \quad v_r = \frac{m'}{r}, \quad m' = \frac{Q'}{2\pi}$$

$$Q = \frac{60}{360}Q' = \frac{1}{6}Q', \quad Q' = 6Q = 6 \times 20 = 120cm^3/s, \quad m' = 19cm^3/s$$

$$(2)\ v_{rA} = \frac{m'}{r_A} = \frac{Q'}{2\pi r_A} = \frac{120}{(2\pi \times 20)} = 0.55cm/s$$

$$(3)\ v_r\frac{dv_r}{dr} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dr}, \quad \frac{dp}{dr} = -\rho v_r\left(\frac{dv_r}{dr}\right)_A = \frac{\rho m'^2}{r_A^3}$$

$$\left(\frac{dp}{dr}\right)_A = \frac{(1.204 \times 10^{-6} \times 19.1^2)}{34.6^3} = 0.01 \times 10^{-6}$$

$$(4)\ v_{rA} = \frac{Q}{A} = \frac{20}{40} = 0.5cm/s$$

3.

(1) Parallel flow with $\theta = \alpha$

$$w = ar\{(\cos(\theta + \alpha) + i\sin(\theta + \alpha)\}$$

$$\varphi = ar\cos(\theta + \alpha), \quad \psi = ar\sin(\theta + \alpha)$$

$$\frac{dw}{dz} = ae^{i\alpha} = a(\cos\alpha + i\sin\alpha) = u - iv$$

$u = a\cos\alpha, \quad v = -a\sin\alpha, \quad V = a$

(2) Corner flow with $\theta = 2\pi$

$z = re^{i\theta}, \quad w = \varphi + i\psi = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$

$\varphi = r^n \cos n\theta, \quad \psi = r^n \sin n\theta$

$For\ n = \dfrac{1}{2}, \quad \varphi = r^{1/2}\cos\dfrac{\theta}{2}, \quad \psi = r^{1/2}\sin\dfrac{\theta}{2}$

(3) Parallel (U=3)+circulation($\Gamma = 10\pi$) flow

$w = -5i\ln(re^{i\theta}) + 3re^{i\theta} = -5\ln r + 5\theta + 3r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$\varphi = 5\theta + 3r\cos\theta, \quad \psi = 3r\sin\theta - 5\ln r$

(4) Parallel flow(U=2)+source flow($Q = 6\pi$)

$w = 2re^{i\theta} + 3\ln(re^{i\theta})$

$\varphi = 2r\cos\theta + 3\ln r, \quad \psi = 2r\sin\theta + 3\theta$

4.

.

$$w = Uz - \frac{i\Gamma}{2\pi}lnz + \frac{Q}{2\pi}ln(z-a)$$

$$\frac{dw}{dz} = U - \frac{i\Gamma}{2\pi z} + \frac{Q}{2\pi(z-a)}$$

$$(\frac{dw}{dz})^2 = U^2 - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 x^2} + \frac{Q^2}{4\pi^2 z^2} + \frac{Q^2}{4\pi^2(z-a)^2)} + \frac{iU\Gamma}{\pi z}$$

$$+\frac{UQ}{\pi(z-a)} - \frac{i\Gamma Q}{2\pi^2 z(z-a)} - \frac{i\Gamma Q}{2\pi^2 az} - \frac{i\Gamma Q}{2\pi^2 a(z-a)}$$

$$\frac{1}{z(z-a)} = \frac{1}{a(z-a)} - \frac{1}{az}$$

At z=0 : $F_x - iF_y = \dfrac{i\rho}{2}\oint(\dfrac{dw}{dz})^2 dz = \dfrac{i\rho}{2}(\dfrac{iU\Gamma}{\pi} - \dfrac{i\Gamma Q}{2\pi^2 a}) = -i\rho\Gamma(U - \dfrac{Q}{2\pi a})$

$$F_x = 0, F_y = \rho\Gamma(U - \frac{Q}{2\pi a})$$